Nechť X je vektorový prostor nad $\mathbb{F}$ a $p: X \to [0,\infty)$ je funkce s vlastnostmi:

(a) $\forall x \in X \setminus \{0\}: p(x) > 0$

(b) $p(x+y)^2 + p(x-y)^2 = 2\left(p(x)^2 + p(y)^2\right)$ pro $x, y \in X$

$\boxed{1}$ Platí $p(0) = 0$

⌜dosadíme $x = y = 0$ do (b), dostaneme

$2p(0)^2 = 4p(0)^2$, tedy $p(0) = 0$. ⌟

$\boxed{2}$ $\forall x \in X: p(2x) = 2p(x)$

⌜dosadíme do (b) $y = x$, dostaneme

$p(2x)^2 + p(0)^2 = 4p(x)^2$, z $\boxed{1}$ plyne

$p(2x)^2 = 4p(x)^2$, tedy $p(2x) = 2p(x)$. ⌟

$\boxed{3}$ $\forall x \in X: p(-x) = p(x)$

⌜dosadíme do (b) $y = -x$, dostaneme

$p(0)^2 + p(2x)^2 = 2\left(p(x)^2 + p(-x)^2\right)$

použijme $\boxed{1}$ a $\boxed{2}$, pak máme

$$4p(x)^2 = 2p(x)^2 + 2p(-x)^2$$
$$2p(-x)^2 = 2p(x)^2$$
$$p(-x) = p(x). ⌟$$

$\boxed{4}$ pro $x, y \in X$ definujme $q(x,y) := \frac{1}{4}\left(p(x+y)^2 - p(x-y)^2\right)$

$\boxed{5}$ $\forall x \in X: q(x,x) = p(x)^2$

⌜$q(x,x) = \frac{1}{4}\left(p(2x)^2 - p(0)^2\right) \overset{\boxed{1},\boxed{2}}{=} p(x)^2$ ⌟

$\boxed{6}$ $\forall x, y \in X: q(x,y) = q(y,x)$

⌜plyne z definice $\boxed{4}$, protože dle $\boxed{3}$ je $p(x-y) = p(y-x)$

$\boxed{7}$ $\forall x,y \in X: \quad q(-x,y) = -q(x,y)$

$$\ulcorner\, q(-x,y) = \frac{1}{4}\left(p(-x+y)^2 - p(-x-y)^2\right) =$$

$$\overset{\boxed{3}}{=} \frac{1}{4}\left(p(x-y)^2 - p(x+y)^2\right) \overset{\boxed{4}}{=} -q(x,y). \,\lrcorner$$

$\boxed{8}$ $\forall x,y,z \in X: \quad q(x+y,z) = q(x,z) + q(y,z)$

$$\ulcorner\, q(x+y,z) = \frac{1}{4}\left(p(x+y+z)^2 - p(x+y-z)^2\right) =$$

$$\overset{(b)}{=} \frac{1}{4}\Big(2\left(p(x+z)^2 + p(y)^2\right) - p(x-y+z)^2 - 2\left(p(x-z)^2 + p(y)^2\right) + p(x-y-z)^2\Big) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(p(x+z)^2 - p(x-z)^2\right) - \frac{1}{4}\left(p(x-y+z)^2 - p(x-y-z)^2\right)$$

$$\overset{\boxed{4}}{=} 2q(x,z) - q(x-y,z)$$

Tedy $q(x+y,z) = 2q(x,z) - q(x-y,z)$

totéž s prohozenými x a y dá:

$$q(y+x,z) = 2q(y,z) - q(y-x,z)$$

Sečteme obě rovnosti a použijeme $\boxed{7}$, dostaneme

$$q(x+y,z) = q(x,z) + q(y,z). \,\lrcorner$$

$\boxed{9}$ $\forall x,z \in X \ \forall n \in \mathbb{N}: \quad q(nx,z) = n\,q(x,z)$

$\ulcorner$ indukcí: $n=1$ – jasné

Nechť platí pro n. $q((n+1)x,z) \overset{\boxed{8}}{=} q(nx,z) + q(x,z) \overset{\text{ind. předp.}}{=} n\,q(x,z) + q(x,z) = (n+1)\,q(x,z)$ $\lrcorner$

$\boxed{10}$ $\forall x,z \in X \ \forall n \in \mathbb{N}: \quad q\left(\frac{x}{n},z\right) = \frac{1}{n} q(x,z)$

$$\ulcorner\, q\left(\frac{x}{n},z\right) = \frac{1}{n}\cdot n\,q\left(\frac{x}{n},z\right) \overset{\boxed{9}}{=} \frac{1}{n} q\left(n\cdot\frac{x}{n},z\right) = \frac{1}{n} q(x,z). \,\lrcorner$$

$\boxed{11}$ $\forall x,z \in X \ \forall \lambda \in \mathbb{Q}: \quad q(\lambda x,z) = \lambda\,q(x,z)$

$\ulcorner$ $\lambda > 0$ – plyne z $\boxed{9}$ a $\boxed{10}$

$\lambda = 0$ – plyne z $\boxed{7}$, neboť $q(0,z) = -q(0,z)$, tj. $q(0,z) = 0$

$\lambda < 0$ – navíc použijeme $\boxed{7}$ $\lrcorner$

$\boxed{12}$ Prozatímní shrnutí: Pakliže p splňuje (a), (b) a q definujeme pomocí $\boxed{4}$, pak platí

(i) $\forall x,y,z \in X: \ q(x+y,z) = q(x,z) + q(y,z)$

(ii) $\forall x,y \in X \ \forall \lambda \in \mathbb{Q}: \ q(\lambda x, y) = \lambda q(x,y)$

(iii) $\forall x,y \in X: \ q(x,y) = q(y,x)$

(iv) $\forall x \in X: \ q(x,x) \geq 0$ a $q(x,x) = 0 \iff x = 0$

Navíc $p(x) = \sqrt{q(x,x)}$ pro $x \in X$.

$\ulcorner$ (i) plyne z $\boxed{8}$, (ii) plyne z $\boxed{11}$. „Navíc" plyne z $\boxed{5}$

(iv) plyne z „Navíc", (a) a $\boxed{1}$

(iii) plyne z $\boxed{6}$. $\lrcorner$

$\boxed{13}$ $\forall x,y \in X: \ |q(x,y)| \leq \sqrt{q(x,x)}\sqrt{q(y,y)} = p(x)\cdot p(y)$

$\ulcorner$ $\forall \lambda \in \mathbb{Q}$:

$$0 \overset{\boxed{12}(iv)}{\leq} q(x-\lambda y, x-\lambda y) \overset{\boxed{12}}{=} q(x,x) - 2\lambda q(x,y) + \lambda^2 q(y,y)$$

Tedy $\lambda^2 q(y,y) - 2\lambda q(x,y) + q(x,x) \geq 0$ pro $\lambda \in \mathbb{Q}$,

tedy i pro $\lambda \in \mathbb{R}$ ($\mathbb{Q}$ je hustá v $\mathbb{R}$, kvadratická funkce je spojitá)

Proto diskriminant je ≤ 0, tj.

$$4q(x,y)^2 - 4q(x,x)q(y,y) \leq 0$$

Odtud $|q(x,y)| \leq \sqrt{q(x,x)}\cdot\sqrt{q(y,y)} = p(x)\,p(y)$ $\lrcorner$

$\boxed{14}$ p splňuje: (α) $\forall x \in X$ $p(x) \geq 0$ a $p(x) = 0 \iff x = 0$

(β) $\forall x \in X \ \forall \lambda \in \mathbb{Q}$: $p(\lambda x) = |\lambda|\, p(x)$

(γ) $\forall x,y \in X$: $p(x+y) \leq p(x) + p(y)$

$\ulcorner$ (α) plyne z (a) a $\boxed{1}$

(β): $p(\lambda x) = \sqrt{q(\lambda x, \lambda x)} \overset{\boxed{12}}{=} \sqrt{\lambda^2 q(x,x)} = |\lambda|\, p(x)$

(γ) $p(x+y)^2 = q(x+y, x+y) \overset{\boxed{12}}{=} q(x,x) + 2q(x,y) + q(y,y)$

$$\overset{\boxed{12},\boxed{13}}{\leq} p(x)^2 + 2p(x)p(y) + p(y)^2 = (p(x) + p(y))^2$$ $\lrcorner$

$\boxed{15}$ Tedy z vlastností (a) a (b) plyne, že p je „norma nad $\mathbb{Q}$" generovaná „skalárním součinem nad $\mathbb{Q}$", který je dán vzorcem $\boxed{4}$.

$\boxed{16}$ Je-li navíc ~~[illegible]~~ pro každé $x \in X$ funkce $t \mapsto p(tx)$ spojitá na $\mathbb{R}$, je p „reálná" norma a q „reálný" skalární součin generující p

$\ulcorner$ Zbývá ukázat, že $q(\lambda x, y) = \lambda q(x,y)$ pro $\lambda \in \mathbb{R}$

a $p(\lambda x) = |\lambda| p(x)$ pro $\lambda \in \mathbb{R}$

- $\lambda \mapsto p(\lambda x) - |\lambda| p(x)$ je spojitá na $\mathbb{R}$, nulová na $\mathbb{Q}$, tedy nulová na $\mathbb{R}$

- ~~Podobně $\lambda \mapsto q(\lambda x, y)$~~

Odtud vidíme, že p je norma. Tedy (X, p) je NLP, p je spojitá na (X,p), tedy z $\boxed{4}$ plyne, že q je spojitá na $X \times X$.

Proto $\lambda \mapsto q(\lambda x, y) - \lambda q(x,y)$ je spojitá na $\mathbb{R}$, nulová na $\mathbb{Q}$, tedy nulová na $\mathbb{R}$. $\lrcorner$

$\boxed{17}$ Je-li navíc $\mathbb{F} = \mathbb{C}$ a p splňuje $p(ix) = p(x)$, $x \in X$,

definuje $q_c(x,y) = q(x,y) + i\,q(x,iy)$ skalární součin (komplexní)

a p je norma jím generovaná

$\ulcorner$ • $q(ix,y) = \frac{1}{4}\left(p(ix+y)^2 - p(ix-y)^2\right) = \frac{1}{4}\left(p(x-iy)^2 - p(x+iy)^2\right) =$

$= q(x, iy)$

tj. $q(ix,y) = -q(x,iy)$

- $q_c(ix,y) = q(ix,y) + i\,q(ix,iy) = -q(x,iy) - i\,q(x,-y)$

$= -q(x,iy) + i\,q(x,y) = i\left(q(x,y) + i\,q(x,iy)\right) = i\,q_c(x,y)$

- $q_c(y,x) = q(y,x) + i\,q(y,ix) = q(x,y) + i\,q(ix,y) = q(x,y) - i\,q(x,iy)$

$= \overline{q_c(x,y)}$

- $q_c(x,x) = q(x,x) + i\,q(x,ix)$

$q(x,x) = p(x)^2$

$q(x,ix) = q(ix,x) = -q(x,ix) \Rightarrow q(x,ix) = 0$ $\Big\} \Rightarrow q_c(x,x) = p(x)^2$ $\lrcorner$