Tvrzení 46 Nechť $(X, \|\cdot\|)$ je NLP, $\dim X = \infty$. Pak:

(a) Existuje nespojitý lineární funkcionál $f : X \to \mathbb{F}$.

(b) Na X existuje norma, která není ekvivalentní $\|\cdot\|$.

Důkaz: Připomeňme tvrzení z lineární algebry:

T1: Každý vektorový prostor má bázi.

T2: Nechť X, Y jsou dva vektorové prostory. Nechť $B \subset X$ je báze. Pak každé zobrazení $\Phi : B \to Y$ lze (právě jedním způsobem) rozšířit na lineární zobrazení $L : X \to Y$.

Nechť B je báze prostoru X. Protože $\dim X = \infty$, je B nekonečná množina. BÚNO můžeme předpokládat, že $\|b\| = 1$ pro každé $b \in B$.

Nechť (b_n) je prostá posloupnost v B.

(a) Dle T2 existuje $f : X \to \mathbb{F}$ lineární, pro které platí

$f(b_n) = n$ pro $n \in \mathbb{N}$. Zřejmě f není spojitý

$$\left(\sup_{x \in B_X} \|f(x)\| = \infty \right)$$

(b) Dle T2 existuje $L : X \to X$ lineární, pro které platí:

$$L(b_n) = n b_n, \quad n \in \mathbb{N}$$

$$L(b) = b, \quad b \in B \setminus \{b_n : n \in \mathbb{N}\}$$

Pak L je bijektivní a norma $|||x||| = \|Lx\|$, $x \in X$

není ekvivalentní $\|\cdot\|$
$$\left(\begin{array}{c} \|b_n\| = 1 \\ |||b_n||| = n \end{array} \right)$$