II. Spojité lineární funkcionály a dualita
II.1. Rozšiřování lineárních funkcionálů

Definice. Nechť X je vektorový prostor nad $\mathbb{F}$. Zobrazení $p : X \to \mathbb{R}$ se nazývá **sublineární funkcionál**, pokud má následující vlastnosti:

- $\forall x, y \in X : p(x+y) \leq p(x) + p(y)$,
- $\forall x \in X \forall t \in (0, \infty) : p(tx) = tp(x)$.

Pokud zobrazení p navíc splňuje

- $\forall x \in X \forall \lambda \in \mathbb{F} : p(\lambda x) = |\lambda| \, p(x)$,

pak se nazývá **pseudonorma**.

Poznámka. Je-li p sublineární funkcionál, pak $p(\boldsymbol{o}) = 0$. Sublineární funkcionál může nabývat i záporných hodnot, pseudonorma nabývá pouze nezáporných hodnot. Pseudonorma splňuje všechny vlastnosti normy, až na to, že může nabývat nuly i v některých nenulových vektorech.

Věta 1 (algebraická verze Hahn-Banachovy věty). *Nechť X je reálný vektorový prostor, $p : X \to \mathbb{R}$ sublineární funkcionál, $Y \subset\subset X$ vektorový podprostor a $f : Y \to \mathbb{R}$ lineární funkcionál. Pokud pro každé $x \in Y$ platí $f(x) \leq p(x)$, pak existuje lineární funkcionál $g : X \to \mathbb{R}$ takový, že*

- *$g(x) = f(x)$ pro každé $x \in Y$,*
- *$g(x) \leq p(x)$ pro každé $x \in X$.*

Lemma 2 (rozšíření funkcionálu o jednu dimenzi). *Nechť X, Y, p a f jsou jako ve Větě 1. Nechť $x_0 \in X \setminus Y$. Pak existuje takové $\alpha \in \mathbb{R}$, že platí*

$$\forall y \in Y \forall t \in \mathbb{R} : f(y) + t\alpha \leq p(y + tx_0).$$

Větička 3. *Nechť X je vektorový prostor nad $\mathbb{F}$, $f : X \to \mathbb{F}$ lineární funkcionál a p pseudonorma na X. Pokud pro každé $x \in X$ platí $\operatorname{Re} f(x) \leq p(x)$, pak pro každé $x \in X$ platí $|f(x)| \leq p(x)$.*

Důsledek 4 (algebraická Hahn-Banachova věta pro pseudonormu). *Nechť X je vektorový prostor nad $\mathbb{F}$, p je pseudonorma na X, $Y \subset\subset X$ vektorový podprostor a $f : Y \to \mathbb{F}$ lineární funkcionál. Pokud pro každé $x \in Y$ platí $|f(x)| \leq p(x)$, pak existuje lineární funkcionál $g : X \to \mathbb{F}$ takový, že*

- *$g(x) = f(x)$ pro každé $x \in Y$,*
- *$|g(x)| \leq p(x)$ pro každé $x \in X$.*

Věta 5 (Hahn-Banach). *Nechť X je normovaný lineární prostor nad $\mathbb{F}$, Y vektorový podprostor X a $f \in Y^*$. Pak existuje $g \in X^*$ takové, že $g|_Y = f$ a $\|g\| = \|f\|$.*

Důsledek 6. *Nechť X je normovaný lineární prostor a $x \in X$. Pak existuje $f \in X^*$ takové, že $\|f\| = 1$ a $f(x) = \|x\|$.*

Důsledek 7 (duální vyjádření normy). *Nechť X je normovaný lineární prostor. Pak pro každé $x \in X$ platí $\|x\| = \max\{|f(x)| \,;\, f \in B_{X^*}\}$.*

Věta 8. *Nechť X je normovaný lineární prostor, Y jeho uzavřený podprostor a $x_0 \in X \setminus Y$. Pak existuje $f \in X^*$ takové, že $\|f\| = 1$, $f|_Y = 0$ a $f(x_0) = \operatorname{dist}(x_0, Y)$.*

Důsledek 9 (důkaz hustoty pomocí Hahn-Banachovy věty). *Nechť X je normovaný lineární prostor a $Z \subset\subset Y \subset\subset X$ jsou vektorové podprostory. Pak podprostor Z je hustý v Y, právě když platí*

$$\forall f \in X^* : f|_Z = 0 \Rightarrow f|_Y = 0.$$