X separabilní Banachův prostor $\Rightarrow$ X je izometrický kvocient prostoru ℓ_1

<u>Dk:</u> X separabilní $\Rightarrow$ S_X separabilní.

Zvolme $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ hustou podmnožinu S_X

Definujme $T : \ell_1 \to X$ předpisem $T\left((\alpha_n)_{n=1}^{\infty}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n x_n$

- $\sum_{n=1}^{\infty} \|\alpha_n x_n\| = \sum_{n=1}^{\infty} |\alpha_n| = \|(\alpha_n)\|_1$ $\Rightarrow$ řada konverguje absolutně, tedy konverguje (díky úplnosti X) $\Rightarrow$ T je dobře definováno
- zřejmě T je lineární, $\|T\| \le 1$ (dle výpočtu výše)

Zbývá ukázat, že $T(U_{\ell_1}) = U_X$

<u>Pozorování:</u> $\forall c > 0$ $\{c x_n : n \in \mathbb{N}\}$ je hustá v $c S_X = \{x \in X : \|x\| = c\}$

Zvolme $x \in U_X$, označme $\alpha_1 := \|x\|$. Pak $\alpha_1 < 1$

Pokud $\alpha_1 = 0$, tj. $x = 0$, pak $x = T(0)$.

Nechť $\alpha_1 > 0$. Najdeme posloupnost $(\beta_n)_{n=2}^{\infty}$ kladných čísel, aby
$$\alpha_1 + \sum_{n=2}^{\infty} \beta_n < 1$$

Konstruujme $\alpha_2, \alpha_3, \dots \ge 0$ a $1 \le n_1 < n_2 < n_3 < \dots$ přirozená čísla následovně:

$n_1 \in \mathbb{N}$, $\|x - \alpha_1 x_{n_1}\| < \beta_2$, $\alpha_2 := \|x - \alpha_1 x_{n_1}\|$

Pokud $\alpha_2 = 0$, tj. $x = \alpha_1 x_{n_1}$, pak $x = T(\alpha_1 e_{n_1}) \in T(U_{\ell_1})$

Pokud $\alpha_2 > 0$, pokračujeme dále indukcí:

máme-li $1 \le n_1 < \dots < n_k$, $\alpha_1, \dots, \alpha_{k+1} > 0$, kde $\alpha_{k+1} = \|x - \sum_{j=1}^{k} \alpha_j x_{n_j}\|$

najdeme $n_{k+1} > n_k$, aby $\|x - \sum_{j=1}^{k} \alpha_j x_{n_j} - \alpha_{k+1} x_{n_{k+1}}\| < \beta_{k+1}$

a položíme $\alpha_{k+1} := \|x - \sum_{j=1}^{k+1} \alpha_j x_{n_j}\|$

Pokud $\alpha_{k+1} = 0$, je $x = T\left(\sum_{j=1}^{k+1} \alpha_j e_{n_j}\right) \in T(U_{\ell_1})$.

Pokud $\alpha_{k+1} > 0$, pokračujeme v konstrukci.

Pokud se konstrukce nezastaví, dostaneme prvek $\sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j e_{n_j} \in U_{\ell_1}$ (protože $\sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j < 1$ a $\alpha_j > 0$) splňující $T\left(\sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j e_{n_j}\right) = x$

(protože $\|x - T\left(\sum_{j=1}^{k} \alpha_j e_{n_j}\right)\| < \beta_k \to 0$.)