

## APPENDIX 2: Něco málo z teorie míry

### A2.1 Nezáporná míra, abstraktní Lebesgueův integrál

Nechť  $\Omega$  je nějaká množina a  $\Sigma$  je nějaký systém podmnožin  $\Omega$ .  $\Sigma$  je  $\sigma$ -algebra, pokud platí

- (a)  $\emptyset \in \Sigma$ ;
- (b)  $A \in \Sigma \Rightarrow \Omega \setminus A \in \Sigma$ ;
- (c) je-li  $(A_n)$  posloupnost prvků  $\Sigma$ , pak  $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \Sigma$ .

Nechť  $\Omega$  je nějaká množina a  $\Sigma$  nějaká  $\sigma$ -algebra podmnožin  $\Sigma$ . Pak dvojici  $(\Omega, \Sigma)$  říkáme **měřitelný prostor**. **Mírou** na  $(\Omega, \Sigma)$  rozumíme každou funkci  $\mu : \Sigma \rightarrow [0, \infty]$  splňující podmínky:

- (a)  $\mu(\emptyset) = 0$ ;
- (b) je-li  $(A_n)$  posloupnost po dvou disjunktních prvků  $\Sigma$ , pak  $\mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$ .

Míra  $\mu$  se nazývá

- **konečná**, pokud  $\mu(\Omega) < \infty$ ;
- **$\sigma$ -konečná**, pokud existuje posloupnost  $(A_n)$  prvků  $\Sigma$  taková, že  $\Omega = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$  a  $\mu(A_n) < \infty$  pro každé  $n$ ;
- **úplná**, pokud pro každou  $A \in \Sigma$  splňující  $\mu(A) = 0$  je každá její podmnožina měřitelná (tj. patří do  $\Sigma$ ).

Není-li  $\mu$  úplná, dá se zúplnit. Její zúplnění je míra  $\tilde{\mu}$  definovaná na  $\sigma$ -algebře  $\tilde{\Sigma}$ , kde

$$\tilde{\Sigma} = \{A \subset \Omega; \exists B, C \in \Sigma : B \subset A \subset C \text{ \& } \mu(C \setminus B) = 0\}$$

a  $\tilde{\mu}(A) = \mu(B) (= \mu(C))$ , kde  $B, C$  jsou jako výše.

Funkce  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{F}$  se nazývá

- **měřitelná**, pokud  $f^{-1}(U) \in \Sigma$  pro každou  $U$  otevřenou;
- **jednoduchá**, nabývá-li jen konečně mnoha hodnot;
- **$\mu$ -měřitelná**, pokud  $f^{-1}(U) \in \tilde{\Sigma}$  pro každou  $U$  otevřenou.

Nechť  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{F}$  je měřitelná. Její integrál podle  $\mu$  se definuje postupně takto:

- Je-li  $f$  jednoduchá a nezáporná, pak  $f$  lze napsat ve tvaru  $f = \sum_{j=1}^n c_j \chi_{A_j}$ , kde  $c_j \geq 0$  a  $A_j \in \Sigma$  jsou po dvou disjunktní množiny. Pak definujeme

$$\int_{\Omega} f \, d\mu = \sum_{j=1}^n c_j \mu(A_j),$$

přičemž používáme konvenci  $0 \cdot (+\infty) = 0$ .

- Je-li  $f$  nezáporná, definujeme

$$\int_{\Omega} f \, d\mu = \sup \left\{ \int_{\Omega} s \, d\mu; 0 \leq s \leq f, s \text{ jednoduchá měřitelná} \right\}.$$

Hodnota tohoto integrálu může být cokoli z intervalu  $[0, \infty]$ .

- Je-li  $f$  reálná, definujeme

$$\int_{\Omega} f \, d\mu = \int_{\Omega} f^+ \, d\mu - \int_{\Omega} f^- \, d\mu,$$

pokud rozdíl má smysl. Hodnota může být cokoli z intervalu  $[-\infty, \infty]$ , smysl nemá rozdíl  $\infty - \infty$ . Pokud integrál existuje a jeho hodnota je reálné číslo,  $f$  se nazývá **integrovatelná**.

- Je-li  $f$  komplexní, definujeme

$$\int_{\Omega} f \, d\mu = \int_{\Omega} \operatorname{Re} f \, d\mu + i \int_{\Omega} \operatorname{Im} f \, d\mu,$$

pokud oba integrály vpravo jsou konečné.

**Poznámka:** Je-li  $f$   $\mu$ -měřitelná, pak integrálem  $\int_{\Omega} f \, d\mu$  rozumíme integrál  $\int_{\Omega} f \, d\tilde{\mu}$ . Pro takovou  $f$  také existuje měřitelná  $g$ , která je rovna  $f$   $\tilde{\mu}$ -skoro všude.

## A2.2 Komplexní a znaménkové míry

Nechť  $(\Omega, \Sigma)$  je měřitelný prostor.  **$\mathbb{F}$ -hodnotovou mírou** rozumíme funkci  $\mu : \Sigma \rightarrow \mathbb{F}$  splňující podmínky (a) a (b) z definice nezáporné míry.  $\mathbb{R}$ -hodnotové míře říkáme **znaménková míra**,  $\mathbb{C}$ -hodnotové míře říkáme **komplexní míra**. (U znaménkových měr se někdy připouští i nekonečné hodnoty, ale v Úvodu do funkcionální analýzy tento případ nebudeme uvažovat.)

- Je-li  $\mu$  komplexní míra, jsou  $\operatorname{Re} \mu$  a  $\operatorname{Im} \mu$  znaménkové míry.
- Je-li  $\mu$  znaménková míra, existuje její jednoznačný Hahnův rozklad, tj. dvě konečné nezáporné míry  $\mu^+$  a  $\mu^-$ , které jsou vzájemně ortogonální (tj. existuje  $A \in \Sigma$  taková, že  $\mu^+(A) = 0$  a  $\mu^-(\Omega \setminus A) = 0$ ) a pro které platí  $\mu = \mu^+ - \mu^-$ . Součet těchto měr  $|\mu| = \mu^+ + \mu^-$  se nazývá **absolutní variace**  $\mu$ . Zmíněné míry lze vyjádřit vzorci

$$\mu^+(A) = \sup\{\mu(B); B \in \Sigma, B \subset A\},$$

$$\mu^-(A) = -\inf\{\mu(B); B \in \Sigma, B \subset A\},$$

$$|\mu|(A) = \sup\left\{\sum_{j=1}^n |\mu(B_j)| : B_1, \dots, B_n \in \Sigma\right.$$

a jsou to po dvou disjunktní podmnožiny  $A$ ).

- Je-li  $\mu$  komplexní míra, její **absolutní variace**  $|\mu|$  lze definovat stejným vzorcem jako výše a je to konečná nezáporná míra.

Integrál z měřitelné funkce  $f$  podle  $\mathbb{F}$ -hodnotové míry se definuje takto:

- Je-li  $\mu$  znaménková, pak  $\int_{\Omega} f \, d\mu = \int_{\Omega} f \, d\mu^+ - \int_{\Omega} f \, d\mu^-$ , má-li výraz vpravo smysl.
- Je-li  $\mu$  komplexní, pak  $\int_{\Omega} f \, d\mu = \int_{\Omega} f \, d\operatorname{Re} \mu + i \int_{\Omega} f \, d\operatorname{Im} \mu$ , má-li výraz vpravo smysl.

Základní odhad pro integrál: Nechť  $\mu$  je  $\mathbb{F}$ -hodnotová míra a  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  je měřitelná funkce, pro kterou integrál  $\int_{\Omega} f \, d\mu$  existuje. Pak

$$\left| \int_{\Omega} f \, d\mu \right| \leq \int_{\Omega} |f| \, d|\mu|.$$

## A2.3 Regulární míry na metrických prostorech

Nechť  $(M, d)$  je metrický prostor. Označme symbolem  $\mathcal{B}$  **borelovskou  $\sigma$ -algebru**, tj. nejmenší  $\sigma$ -algebru podmnožin  $M$  obsahující otevřené množiny. **Borelovskou mírou** na  $M$  rozumíme míru na  $(M, \mathcal{B})$ .

- Nezáporná borelovská míra  $\mu$  na  $M$  se nazývá **regulární**, pokud pro každou  $A \in \mathcal{B}$  platí

$$\mu(A) = \inf\{\mu(U); U \supset A \text{ otevřená}\} = \sup\{\mu(F); F \subset A \text{ uzavřená}\}$$

- Je-li  $\mu$  navíc konečná, stačí ověřovat jen jednu z rovností, druhá plyne snadno pomocí přechodu k doplňkům.
- $\mathbb{F}$ -hodnotová borelovská míra na  $\mu$  se nazývá **regulární**, je-li  $|\mu|$  regulární.
- Jelikož  $\mathbb{F}$ -hodnotové míry jsou automaticky konečné, je taková míra regulární, právě když platí

$$\forall A \in \mathcal{B} \forall \varepsilon > 0 \exists F, G \subset M, G \text{ otevřená, } F \text{ uzavřená,} \\ F \subset A \subset G, |\mu|(G \setminus F) < \varepsilon.$$

**Jiný přístup:** Někdy se borelovskou mírou rozumí míra definovaná na nějaké  $\sigma$ -algebře  $\Sigma \supset \mathcal{B}$ . Regulární mírou se pak rozumí míra definovaná na  $\Sigma \supset \mathcal{B}$ , která splňuje výše uvedenou definici, v níž se  $\mathcal{B}$  nahradí  $\Sigma$ . Tento přístup je však ekvivalentní výše uvedenému, protože platí následující tvrzení:

*Nechť  $\mu$  je míra definovaná na nějaké  $\sigma$ -algebře  $\Sigma \supset \mathcal{B}$ . Označme  $\mu_B$  zúžení  $\mu$  na  $\sigma$ -algebri  $\mathcal{B}$ . Nechť  $\widetilde{\mu}_B$  je zúplnění  $\mu_B$ , příslušná  $\sigma$ -algebra necht' je  $\widetilde{\mathcal{B}}$ . Pak následující dvě podmínky jsou ekvivalentní:*

- $\mu$  je regulární.
- $\mu_B$  je regulární,  $\Sigma \subset \widetilde{\mathcal{B}}$  a  $\mu = \widetilde{\mu}_B$  na  $\Sigma$ .

*Proto  $\mu$ -měřitelné funkce splývají s  $\mu_B$ -měřitelnými a je jedno, zda integrujeme podle  $\mu$  nebo podle  $\mu_B$ .*

#### A2.4 Radon-Nikodýmova věta

Nechť  $\mu$  je nezáporná  $\sigma$ -konečná míra na  $(\Omega, \Sigma)$ . Nechť  $\nu$  je  $\mathbb{F}$ -hodnotová míra na  $(\Omega, \Sigma)$ , která je **absolutně spojitá** vzhledem k  $\mu$ , tj.

$$\forall A \in \Sigma : \mu(A) = 0 \Rightarrow \nu(A) = 0.$$

Pak existuje  $\mu$ -integrovatelná funkce  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{F}$  taková, že pro každou  $A \in \Sigma$  platí

$$\nu(A) = \int_A f \, d\mu.$$

Pak pro každou  $g : \Omega \rightarrow \mathbb{F}$  měřitelnou platí

$$\int_{\Omega} g \, d\nu = \int_{\Omega} gf \, d\mu,$$

pokud aspoň jeden z integrálů má smysl (tj. je roven nějakému komplexnímu číslu).