IV. Kompaktní operátory

V následujících příkladech určete, zda operátor $T \in L(X,Y)$ je kompaktní.

1. $X = (\mathbb{F}^2, \|\cdot\|_2)$, $Y = (\mathbb{F}^3, \|\cdot\|_2)$, $T(x_1, x_2) = (x_1 + x_2, x_1 - x_2, 2x_1 + x_2)$.
2. $X = Y = \ell^2$, $T((x_n)) = (0, x_1, x_2, \dots)$. **3.** $X = Y = \ell^2$, $T((x_n)) = (x_2, x_3, x_4, \dots)$.
4. $X = Y = \ell^2$, $T((x_n)) = (0, x_2, 0, x_4, \dots)$. **5.** $X = Y = \ell^2$, $T((x_n)) = (\frac{1+i}{n} x_n)_{n=1}^{\infty}$.
6. $X = Y = c_0$, $T((x_n)) = (\frac{1}{n} x_n)_{n=1}^{\infty}$. **7.** $X = Y = c_0$, $T((x_n)) = (x_1, \frac{1}{2}x_2, x_3, \frac{1}{4}x_4, x_5, \frac{1}{6}x_6, \dots)$.
8. $X = c_0$, $Y = \ell^2$, $T((x_n)) = (\frac{1}{n} x_n)_{n=1}^{\infty}$. **9.** $X = \ell^2$, $Y = \ell^1$, $T((x_n)) = (\frac{1}{n} x_n)_{n=1}^{\infty}$.
10. $X = \ell^1$, $Y = c_0$, $T((x_n)) = (\frac{x_1 + \dots + x_n}{n})_{n=1}^{\infty}$. **11.** $X = \ell^1$, $Y = \ell^2$, $T((x_n)) = (\frac{x_1 + \dots + x_n}{n})_{n=1}^{\infty}$.
12. $X = \ell^2$, $Y = c_0$, $T((x_n)) = (\frac{x_1 + \dots + x_n}{n})_{n=1}^{\infty}$. **13.** $X = \ell^1$, $Y = c_0$, $T((x_n)) = (\sum_{k=n}^{\infty} x_k)_{n=1}^{\infty}$.
14. $X = \ell^2$, $Y = c_0$, $T((x_n)) = (x_n)_{n=1}^{\infty}$. **15.** $X = \ell^1$, $Y = \ell^2$, $T((x_n)) = (x_n)_{n=1}^{\infty}$.
16. $X = Y = L^p([0,1])$, kde $p \in [1, \infty]$, $T(f)(t) = f(\sqrt{t})$.
17. $X = Y = L^p([0,1])$, kde $p \in [1, \infty]$, $T(f)(t) = t f(t)$.
18. $X = L^1([0, 2\pi])$, $Y = c_0$, $T(f) = (\int_0^{2\pi} f(t) \cos kt \, \mathrm{d}t)_{k=1}^{\infty}$.
19. $X = L^2([0, 2\pi])$, $Y = \ell^2$, $T(f) = (\int_0^{2\pi} f(t) \cos kt \, \mathrm{d}t)_{k=1}^{\infty}$.
20. $X = \ell^1$, $Y = L^p([0,1])$, kde $p \in [1, \infty)$, $T((x_n))(t) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n t^n$, $t \in [0,1]$.
21. $X = \ell^1$, $Y = C([0,1])$, $T((x_n))(t) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n t^n$, $t \in [0,1]$.
22. $X = Y = \mathcal{C}([0,1])$, $T(f) = f + f(1) - f(0)$. **23.** $X = Y = \mathcal{C}([0,1])$, $T(f)(t) = \int_0^t f$, $t \in [0,1]$.
24. $X = \mathcal{C}([0,1])$, $Y = \mathcal{C}^1([0,1])$, $T(f)(t) = \int_0^t f$, $t \in [0,1]$.
25. $X = Y = \mathcal{C}([0,1])$, $T(f)(t) = t f(t)$ **26.** $X = Y = \mathcal{C}([-1,1])$, $T(f)(t) = f(t^2)$.
27. $X = \mathcal{C}([-1,1])$, $Y = \mathcal{C}([0,1])$, $T(f) = f|_{[0,1]}$.
28. $X = Y = \mathcal{C}([0,1])$, $Tf(t) = \int_0^1 s f(\frac{t+s}{2}) \, \mathrm{d}s$. **29.** $X = Y = \mathcal{C}([0,1])$, $Tf(t) = \int_0^1 \sin(s+t) f(s) \, \mathrm{d}s$.
30. $X = Y = L^1([0,1])$, $Tf(t) = \int_0^1 s f(\frac{t+s}{2}) \, \mathrm{d}s$. **31.** $X = Y = L^1([0,1])$, $Tf(t) = \int_0^1 \sin(s+t) f(s) \, \mathrm{d}s$.
32. $X = Y = L^2([0,1])$, $Tf(t) = \int_0^1 s f(\frac{t+s}{2}) \, \mathrm{d}s$. **33.** $X = Y = L^2([0,1])$, $Tf(t) = \int_0^1 \sin(s+t) f(s) \, \mathrm{d}s$.

Výsledky a návody. Při řešení se používá několik tvrzení o kompaktních operátorech. Jednak charakterizace, že T je kompaktní, právě když pro každou omezenou (x_n) má posloupnost (Tx_n) konvergentní podposloupnost. Toto tvrzení se používá zejména k důkazu nekompaktnosti operátoru, ve výsledcích se uvádí příklad takové posloupnosti. Dále se využívá, že konečnědimenzionální operátory jsou kompaktní a že prostor kompaktních operátorů je uzavřený. K tomu se hodí projekce P_n definované na prostorech ℓ^p či c_0, které jsou dány vzorcem $P_n((x_k)) = (x_1, x_2, \dots, x_n, 0, 0, \dots)$. Na ty se ve výsledcích odkazuje. Dále symbolem $\mathbf{e}_n$ značíme kanonické jednotkové vektory v ℓ^p či v c_0. **1.** ANO. Jde o konečnědimenzionální operátor. **2.** NE. Svědčí o tom posloupnost $(\mathbf{e}_n)_n$. **3.** NE. Svědčí o tom posloupnost $(\mathbf{e}_n)_n$. **4.** NE. Svědčí o tom posloupnost $(\mathbf{e}_{2n})_n$. **5.** ANO. $\|T - P_n T\| \le \frac{\sqrt{2}}{n+1}$. **6.** ANO. $\|T - P_n T\| \le \frac{1}{n+1}$. **7.** NE. Svědčí o tom posloupnost $(\mathbf{e}_{2n+1})_n$. **8.** ANO. $\|T - P_n T\| \le \sqrt{\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k^2}}$. **9.** ANO. $\|T - P_n T\| \le \sqrt{\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k^2}}$. **10.** ANO. $\|T - P_n T\| \le \frac{1}{n+1}$. **11.** ANO. $\|T - P_n T\| \le \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$. **12.** ANO. $\|T - P_n T\| \le \frac{1}{\sqrt{n+1}}$. **13.** NE. Svědčí o tom posloupnost $(\mathbf{e}_n)_n$. **14.** NE. Svědčí o tom posloupnost $(\mathbf{e}_n)_n$. **15.** NE. Svědčí o tom posloupnost $(\mathbf{e}_n)_n$. **16.** Pro $p = \infty$ NE, protože pak T je izometrie, $T(B_X) = B_X$. Pro $p < \infty$ rovněž NE, protože $Y = \{f \in X; f = 0 \text{ s.v. na } [0, \frac{1}{2}]\}$ je nekonečně rozměrný uzavřený podprostor X a $T|_Y$ je izomorfismus. **17.** NE, protože $Y = \{f \in X; f = 0 \text{ s.v. na } [0, \frac{1}{2}]\}$ je nekonečně rozměrný uzavřený podprostor X a $T|_Y$ je izomorfismus. **18.** NE. Svědčí o tom posloupnost $(t \mapsto \cos nt)_{n=1}^{\infty}$. **19.** NE. Svědčí o tom posloupnost $(t \mapsto \cos nt)_{n=1}^{\infty}$. **20.** ANO. $\|T - TP_n\| \le \frac{1}{(1+p(n+1))^{1/p}}$. **21.** NE. Svědčí o tom posloupnost $(\mathbf{e}_{2^n})_n$, protože pro každé $m > n$ je $\|t \mapsto t^{2^n} - t^{2^m}\|_\infty \ge \|t \mapsto t^{2^n} - t^{2^{n+1}}\|_\infty = \frac{1}{4}$. **22.** NE, protože $Y = \{f \in X; f(0) = f(1)\}$ je uzavřený podprostor X nekonečné dimenze (je to jádro spojitého lineárního funkcionálu) a $f|_Y$ je identita. **23.** ANO, protože všechny funkce v $T(B_X)$ jsou 1-Lipschitzovské a lze tedy použít větu Arzelà-Ascoliovu. **24.** NE, protože T je izomorfismus (do) a $\mathcal{C}([0,1])$ je nekonečné dimenze. **25.** NE, protože $Y = \{f \in X; f = 0 \text{ na } [0, \frac{1}{2}]\}$ je nekonečně rozměrný uzavřený podprostor X a $T|_Y$ je izomorfismus. **26.** NE, protože $Y = \{f \in X; f = 0 \text{ na } [-1, 0]\}$ je nekonečně rozměrný uzavřený podprostor X a $T|_Y$ je izometrie. **27.** NE, protože Y je nekonečné dimenze a $T(B_X) = B_Y$. **28.** ANO, protože všechny funkce v $T(B_X)$ jsou 1-Lipschitzovské a lze tedy použít větu Arzelà-Ascoliovu. (Nejprve je vhodné provést substituci $u = \frac{1}{2}(s+t)$.) **29.** ANO, protože všechny funkce v $T(B_X)$ jsou 1-Lipschitzovské a lze tedy použít větu Arzelà-Ascoliovu. **30.** ANO. $T = T_2T_1$, kde $T_1 : X \to \mathcal{C}([0,1])$ je definován stejným vzorcem jako T a $T_2 : \mathcal{C}([0,1]) \to Y$ je „indentita". Pak T_2 je spojitý a T_1 kompaktní (všechny funkce v $T(B_X)$ jsou 1-Lipschitzovské a lze tedy použít větu Arzelà-Ascoliovu), tedy T je kompaktní. **31.** ANO. $T = T_2T_1$, kde $T_1 : X \to \mathcal{C}([0,1])$ je definován stejným vzorcem jako T a $T_2 : \mathcal{C}([0,1]) \to Y$ je „indentita". Pak T_2 je spojitý a T_1 kompaktní (všechny funkce v $T(B_X)$ jsou 1-Lipschitzovské a lze tedy použít větu Arzelà-Ascoliovu), tedy T je kompaktní. **32.** ANO. $T = T_2T_1$, kde $T_1 : X \to \mathcal{C}([0,1])$ je definován stejným vzorcem jako T a $T_2 : \mathcal{C}([0,1]) \to Y$ je „indentita". Pak T_2 je spojitý a T_1 kompaktní (všechny funkce v $T(B_X)$ jsou 1-Lipschitzovské a lze tedy použít větu Arzelà-Ascoliovu), tedy T je kompaktní. **33.** ANO. $T = T_2T_1$, kde $T_1 : X \to \mathcal{C}([0,1])$ je definován stejným vzorcem jako T a $T_2 : \mathcal{C}([0,1]) \to Y$ je „indentita". Pak T_2 je spojitý a T_1 kompaktní (všechny funkce v $T(B_X)$ jsou 1-Lipschitzovské a lze tedy použít větu Arzelà-Ascoliovu), tedy T je kompaktní.