ÚVOD DO FUNKCIONÁLNÍ ANALÝZY

PŘÍKLADY PRO POROZUMĚNÍ LÁTCE – ZS 2015/2016

PŘÍKLADY KE KAPITOLE III

K oddílu III.1 – množiny první a druhé kategorie, princip stejnoměrné omezenosti, věta o otevřeném zobrazení, věta o uzavřeném grafu

Příklad 1. Nechť X je normovaný lineární prostor a $Y \subset X$ jeho vektorový podprostor. Ukažte, že Y je řídký v X, právě když není hustý v X.

Příklad 2. Nechť X je Banachův prostor a $Y \subset X$ vektorový podprostor, který je reziduální (tj. $X \setminus Y$ je první kategorie v X). Ukažte, že $Y = X$.

`Návod:` *Nechť $x \in X \setminus Y$. Uvažte Y a $x + Y$.*

Příklad 3. Nechť X je Banachův prostor a $Y \subset X$ hustý podprostor. Ukažte, že Y je první kategorie v X, právě když je první kategorie v sobě.

Příklad 4. Nechť X je Banachův prostor nekonečné dimenze. Ukažte, že každá jeho algebraická (Hamelova) báze je nespočetná.

`Návod:` *Použijte fakt, že každý podprostor X konečné dimenze je uzavřený v X a Baireovu větu.*

Příklad 5. Ukažte, že každý nekonečněrozměrný Banachův prostor X obsahuje vlastní podprostor, který je druhé kategorie v X.

`Návod:` *Nechť B je algebraická báze X a $\{x_n; n \in \mathbb{N}\}$ prostá posloupnost v B. Z Baireovy věty odvoďte, že existuje $n \in \mathbb{N}$, že $\operatorname{span}(B \setminus \{x_k; k \geq n\})$ je druhé kategorie v X.*

Příklad 6. Ukažte, že existují normované lineární prostory, které nejsou úplné, ale jsou druhé kategorie v sobě.

`Návod:` *Zkombinujte příklady 5, 1 a 3.*

Příklad 7. Nechť c_{00} označuje vektorový prostor všech číselných posloupností, které mají jen konečně mnoho nenulových členů. Nechť $X = (c_{00}, \|\cdot\|_p)$, kde $p \in [1, \infty]$.

(1) Ukažte, že prostor X je první kategorie v sobě.
(2) Najděte posloupnost spojitých lineárních funkcionálů (f_n) na X, která bodově konverguje k nespojitému funkcionálu.

Příklad 8. Nechť (a_n) je číselná posloupnost.

(1) Nechť $p \in [1, \infty)$. Přepokládejme, že pro každé $(x_n) \in \ell^p$ řada $\sum_{k=1}^{\infty} a_k x_k$ konverguje. Ukažte, že $(a_n) \in \ell^q$, kde $q \in (1, \infty]$ splňuje $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.
(2) Přepokládejme, že pro každé $(x_n) \in c_0$ řada $\sum_{k=1}^{\infty} a_k x_k$ konverguje. Ukažte, že $(a_n) \in \ell^1$.

`Návod:` *Aplikujte princip stejnoměrné omezenosti na posloupnost (f_n), kde $f_n((x_k)) = \sum_{k=1}^{n} a_k x_k$.*

Příklad 9. Nechť X je Banachův prostor, Y normovaný lineární prostor a (T_n) posloupnost v $L(X,Y)$ taková, že $\lim_n T_n x$ existuje pro každé $x \in X$. Z Banach-Steinhausovy věty víme, že limitní zobrazení $Tx = \lim_n T_n x$ patří do $L(X,Y)$. Musí platit $T_n \to T$ v $L(X,Y)$?

`Návod:` *Uvažte například $X = c_0$, $Y = \mathbb{F}$, $T_n((x_k)) = x_n$.*

Příklad 10. Nechť X je normovaný lineární prostor, Y Banachův prostor a (T_n) omezená posloupnost v $L(X,Y)$. Předpokládejme, že existuje hustá podmnožina $A \subset X$, že pro každé $x \in A$ je posloupnost $(T_n x)$ konvergentní v Y. Ukažte, že existuje právě jeden operátor $T \in L(X,Y)$, že $T_n x \to Tx$ pro každé $x \in X$.

`Návod:` *Nechť $X_0 = \{x \in X; (T_n x) \text{ konverguje}\}$. Ukažte, že X_0 je hustý vektorový podprostor X a limitní zobrazení patří do $L(X_0, Y)$. S použitím Věty I.15 z přednášky je rozšiřte na $T \in L(X,Y)$ a ukažte (s využitím omezenosti (T_n)), že $T_n x \to Tx$ pro každé $x \in X$.*

Příklad 11.

(1) Najděte funkci $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, která má uzavřený graf a není spojitá na $\mathbb{R}$.
(2) Najděte funkci $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, která má uzavřený graf a není spojitá na $[0,1]$.
(3) Nechť X, K jsou metrické prostory, přičemž K je kompaktní. Ukažte, že funkce $f : X \to K$ je spojitá, právě když má uzavřený graf.

Příklad 12. Nechť X je Banachův prostor, Y normovaný lineární prostor a $T : X \to Y$ je spojité lineární zobrazení X na Y.

(1) Je-li T otevřené, ukažte, že Y je úplný.
(2) Je-li Y druhé kategorie v sobě, ukažte, že T je otevřené.
(3) Je-li Y druhé kategorie v sobě, ukažte, že Y je úplný.

`Návod:` *(1) Ukažte, že zobrazení $\widetilde{T}$ z Tvrzení II.12(b) z přednášky je izomorfismus. (2) Projděte důkaz věty o otevřeném zobrazení a ověřte, že funguje i za těchto předpokladů. (3) Zkombinujte (1) a (2).*

K oddílu III.2 – projekce, komplementované podprostory

Příklad 13. Nechť X je normovaný lineární prostor, Y a Z jeho dva uzavřené podprostory splňující $Y \cap Z = \{0\}$ a $Y + Z = X$. Ukažte, že Z je topologický doplněk Y, právě když $\operatorname{dist}(S_Y, S_Z) > 0$.

`Návod:` *Nechť P je projekce na Y podél Z. Je-li P spojitá, ukažte, že $\operatorname{dist}(S_Y, S_Z) \geq \frac{1}{\|P\|}$. Obráceně, není-li P spojitá, existuje posloupnost (x_n) v X, pro kterou platí $x_n \to 0$ a $\|Px_n\| = 1$. Odtud odvoďte, že $\operatorname{dist}(S_Y, S_Z) = 0$.*

Příklad 14. Nechť X je Banachův prostor, Y a Z jeho dva uzavřené podprostory splňující $Y \cap Z = \{0\}$. Ukažte, že $Y + Z$ je uzavřený podprostor X, právě když $\operatorname{dist}(S_Y, S_Z) > 0$.

`Návod:` *Je-li $Y + Z$ uzavřený, použijte Větu III.11 z přednášky a předchozí příklad. Obráceně, je-li $\operatorname{dist}(S_Y, S_Z) > 0$, z předchozího příkladu plyne, že projekce P prostoru $Y+Z$ na Y podél Z je spojitá. Rozšiřte P a $\mathrm{Id}-P$ na $\overline{Y+Z}$ podle Tvrzení I.15 z přednášky a ukažte, že $\overline{Y+Z} = Y+Z$.*

Příklad 15. Nechť $X = c_0$ nebo $X = \ell^p$, $p \in [1, \infty)$. Najděte dva uzavřené podprostory $Y, Z \subset X$ takové, že $Y \cap Z = \{0\}$ a $Y + Z$ je vlastní hustý podprostor X.

`Návod:` *Nechť (e_n) jsou kanonické bázové vektory. Vezměte $Y = \overline{\operatorname{span}}\{e_{2n}; n \in \mathbb{N}\}$ a $Z = \overline{\operatorname{span}}\{\alpha_n e_{2n-1} + e_{2n}; n \in \mathbb{N}\}$ pro vhodně zvolené konstanty α_n.*

Příklad 16. Nechť X je normovaný lineární prostor a Y jeho podprostor izomorfní prostoru $\ell^\infty(\Gamma)$ pro nějakou množinu Γ. Ukažte, že Y je komplementovaný v X.

`Návod:` *Použijte Příklad II.7.*

Příklad 17. Ukažte, že existuje systém $\mathcal{A}$ nekonečných podmnožin $\mathbb{N}$, který je nespočetný a přitom průnik každých dvou různých prvků $\mathcal{A}$ je konečný. (Tj. nespočetný skoro disjunktní systém podmnožin $\mathbb{N}$.)

`Návod:` *První možnost: Použijte Zornovo lemma k důkazu, že existuje maximální systém s danou vlastností a ukažte, že nemůže být spočetný. Druhá možnost: Pro každé $x \in \mathbb{R}$ zafixujme posloupnost $(q_n(x))$ racionálních čísel konvergující k x a položme $A_x = \{q_n(x); n \in \mathbb{N}\}$. Nakonec použijte, že existuje bijekce $\mathbb{Q}$ na $\mathbb{N}$.*

Příklad 18. Ukažte, že c_0 není komplementovaný v ℓ^∞.

`Návod:` *Sporem. Nechť P je spojitá projekce ℓ^∞ na c_0. Označme $Q = I - P$. Pak i Q je spojitá projekce, $c_0 = \ker Q$. Nechť $\mathcal{A}$ je systém z předchozího příkladu. Pro $A \in \mathcal{A}$ nechť $x_A = \chi_A$. Ukažte, že existují $m, n \in \mathbb{N}$, že $\mathcal{A}_{m,n} = \{A \in \mathcal{A}; |Q(x_A)(n)| > \frac{1}{m}\}$ je nespočetná. Zároveň ukažte, že $\mathcal{A}_{m,n}$ musí být konečná: Nechť $A_1, \dots, A_k \in \mathcal{A}_{m,n}$. Položme $B_j = A_j \setminus \bigcup_{l \neq k} A_l$ a $y_j = \chi_{B_j}$. Ukažte, že $Q(y_j) = Q(x_{A_j})$ a pro vhodné komplexní jednotky α_j platí $\left\| \sum_j \alpha_j y_j \right\| = 1$ a $\left\| Q(\sum_j \alpha_j y_j) \right\| \geq \frac{k}{m}$ a odtud odvoďte horní odhad pro k. Nakonec odvoďte spor.*

K oddílu III.3 – duální a adjungované operátory

Příklad 19. Nechť X je normovaný lineární prostor, Y jeho podprostor. Nechť $T : Y \to X$ je identické zobrazení. Ukažte, že $T' : X^* \to Y^*$ je dáno vzorcem $T'(x^*) = x^*|_Y$ pro $x^* \in X^*$.

Příklad 20. Nechť X je normovaný lineární prostor a $\varphi \in X^*$.

(1) Interpretujte rovnost $\mathbb{F}^* = \mathbb{F}$ (tj. popište příslušnou izometrii).
(2) Odvoďte vzorec pro $\varphi' \in L(\mathbb{F}^*, X^*)$ jakožto pro prvek $L(\mathbb{F}, X^*)$ při identifikaci z bodu (1).

Příklad 21. Nechť $X = (\mathbb{F}^n, \|\cdot\|_X)$ a $Y = (\mathbb{F}^m, \|\cdot\|_Y)$.

(1) Ukažte, že každý operátor $T \in L(X, Y)$ je reprezentován nějakou maticí typu $n \times m$, tj. existuje A matice typu $n \times m$, že pro každé $x \in X$ je $Tx = Ax$ (vektory píšeme do sloupce).
(2) Ukažte, že X^* lze reprezentovat jako $\mathbb{F}^n$ (s nějakou normou) a podobně Y^* lze reprezentovat jako $\mathbb{F}^m$ (s nějakou normou).
(3) Nechť $T \in L(X, Y)$. Pak T' lze pomocí předchozího bodu interpretovat jako lineární operátor $\mathbb{F}^m \to \mathbb{F}^n$. Jakou maticí je reprezentován operátor T', je-li T reprezentován maticí A?

Příklad 22. Nechť $X = (\mathbb{F}^n, \|\cdot\|_2)$ a $Y = (\mathbb{F}^m, \|\cdot\|_2)$. Nechť $T \in L(X, Y)$ je reprezentován maticí A. Jakou maticí je reprezentován hilbertovsky adjungovaný operátor T^*?

Příklad 23. Nechť K, L jsou dva (metrické) kompaktní prostory a $\varphi : K \to L$ spojité zobrazení. Definujme operátor $T : \mathcal{C}(L) \to \mathcal{C}(K)$ předpisem $T(f) = f \circ \varphi$. Interpretujte duální operátor T' jako operátor $\mathcal{M}(K) \to \mathcal{M}(L)$ (pomocí Věty II.27). Ukažte, že při této interpretaci pro $\mu \in \mathcal{M}(K)$ je $T'(\mu) = \varphi(\mu)$ (obraz míry μ při zobrazení φ).

`Návod:` *Dokažte, že $\varphi(\mu)$ je regulární borelovská míra a použijte větu o integraci podle obrazu míry.*

Příklad 24. Nechť X je normovaný lineární prostor a $P \in L(X)$ je projekce.

(1) Ukažte, že P' je projekce na X'.
(2) Ukažte, že $(PX)^*$ je izomorfní $P'X^*$.
(3) Pokud $\|P\| = 1$, ukažte, že $(PX)^*$ je izometrické $P'X^*$.

Příklad 25. Nechť H je Hilbertův prostor a $P \in L(H)$ je projekce.

(1) Ukažte, že P^* je také projekce.
(2) Ukažte, že P je ortogonální projekce (tj. $\ker P = (P(H))^\perp$), právě když $P^* = P$.

Příklad 26. Nechť $p_1, p_2 \in [1, \infty)$, $p_1 < p_2$.

(1) Ukažte, že $\ell^{p_1} \subset \ell^{p_2}$.
(2) Nechť $T : \ell^{p_1} \to \ell^{p_2}$ je „identita“. Ukažte, že $T \in L(\ell^{p_1}, \ell^{p_2})$ a $\|T\| = 1$.
(3) Vyjádřete T' jako prvek $L(\ell^{q_2}, \ell^{q_1})$ pro odpovídající $q_1, q_2 \in (1, \infty]$ s použitím reprezentace duálů podle oddílu II.4 z přednášky.

`Návod:` *(1),(2) Ukažte $B_{\ell^{p_1}} \subset B_{\ell^{p_2}}$.*

Příklad 27. Nechť $p \in [1, \infty)$.

(1) Ukažte, že $\ell^p \subset c_0$.
(2) Nechť $T : \ell^p \to c_0$ je „identita“. Ukažte, že $T \in L(\ell^p, c_0)$ a $\|T\| = 1$.
(3) Vyjádřete T' jako prvek $L(\ell^1, \ell^q)$ pro odpovídající $q \in (1, \infty]$ s použitím reprezentace duálů podle oddílu II.4 z přednášky.

Příklad 28. Nechť $p_1, p_2 \in [1, \infty)$, $p_1 < p_2$ a $r > 0$.

(1) Ukažte, že $L^{p_2}([0, r]) \subset L^{p_1}([0, r])$.
(2) Nechť $T : L^{p_2}([0, r]) \to L^{p_1}([0, r])$ je „identita“. Ukažte, že $T \in L(L^{p_2}([0, r]), L^{p_1}([0, r]))$ a spočtěte $\|T\|$.
(3) Vyjádřete T' jako prvek $L(L^{q_1}([0, r]), L^{q_2}([0, r]))$ pro odpovídající $q_1, q_2 \in (1, \infty]$ s použitím reprezentace duálů podle oddílu II.4 z přednášky.

`Návod:` *(1),(2) Použijte Hölderovu nerovnost.*

Příklad 29. Nechť H_1, H_2 jsou Hilbetovy prostory a T je izometrie H_1 na H_2. Ukažte, že $T^* = T^{-1}$.

`Návod:` *Použijte polarizační identitu.*

Příklad 30. Nechť X, Y jsou Banachovy prostory a $S \in L(Y^*, X^*)$. Ukažte, že existuje $T \in L(X, Y)$ splňující $S = T'$, právě když $S'(\varkappa_X(X)) \subset \varkappa_Y(Y)$.

`Návod:` *Pro implikaci $\Rightarrow$ využijte Větičku III.16(d) z přednášky, pro opačnou implikaci položte $T = \varkappa_Y^{-1} S' \varkappa_X$ a ověřte, že $T' = S$.*

Příklad 31. Nechť X, Y jsou Banachovy prostory. Ukažte, že zobrazení $T \mapsto T'$ zobrazuje $L(X, Y)$ na $L(Y^*, X^*)$, právě když Y je reflexivní nebo $X = \{\boldsymbol{o}\}$.

`Návod:` *Pro implikaci $\Leftarrow$ použijte předchozí příklad. Pro opačnou implikaci předpokládejte, že $\varphi \in Y^{**} \setminus \varkappa(Y)$ a $x^* \in X^* \setminus \{\boldsymbol{o}\}$ a uvažte operátor $S \in L(Y^*, X^*)$ definovaný vzorcem $S(y^*) = \varphi(y^*) x^*$.*

K oddílu III.4 – kompaktnost v Banachových prostorech, kompaktní operátory

Příklad 32. Nechť $A \subset c_0$. Ukažte, že A je relativně kompaktní, právě když

$$\left(\sup_{x\in A} |x_n|\right)_{n=1}^{\infty} \in c_0.$$

Návod: *Nechť (a_n) je uvedená posloupnost. Pro důkaz implikace $\Leftarrow$ dokažte, že A je totálně omezená s využitím toho, že $a_n \to 0$ a totální omezenosti omezených množin v konečněrozměrném prostoru. Pro důkaz opačné implikace předpokládejme, že $a_n \not\to 0$. Pak existuje $\varepsilon > 0$, že pro nekonečně mnono n je $a_n > \varepsilon$. Ukažte, že pak v množině A existuje $\frac{\varepsilon}{2}$-diskrétní posloupnost.*

Příklad 33. Nechť $p \in [1, \infty)$ a $A \subset \ell^p$. Ukažte, že A je relativně kompaktní, právě když je omezená a navíc řada $\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p$ konverguje stejnoměrně pro $x \in A$.

Návod: *Pro implikaci $\Rightarrow$ použijte totální omezenost a konvergenci uvedené řady pro každé $x \in A$. Pro implikaci $\Leftarrow$ použijte totální omezenost omezenených množin v konečněrozměrných prostorech k důkazu totální omezenosti A.*

Příklad 34. Nechť $p \in [1, \infty)$. Ukažte, že existuje $A \subset \ell^p$ relativně kompaktní, pro kterou

$$\left(\sup_{x\in A} |x_n|\right)_{n=1}^{\infty} \notin \ell^p.$$

Návod: *Použijte následující postřeh: Pokud (x_n) je posloupnost v X a $x_n \to x$, pak množina $\{x\} \cup \{x_n; n \in \mathbb{N}\}$ je kompaktní.*

Příklad 35. Nechť c je prostor konvergentních posloupností a $A \subset c$. Ukažte, že A je relativně kompaktní, právě když je omezená a navíc posloupnost (x_n) konverguje stejnoměrně pro $x \in A$.

Příklad 36. Ukažte, že množina

$$A = \{f \in \mathcal{C}([0,1]); \|f\|_\infty \le C \ \&\ f \text{ je } D\text{-lipschitzovská}\}$$

je kompaktní v $\mathcal{C}([0,1])$ pro každou volbu $C > 0$ a $D > 0$.

Návod: *Použijte větu Arzelà-Ascoliovu.*

Příklad 37. Ukažte, že „identita“ $\mathcal{C}^1([0,1]) \to \mathcal{C}([0,1])$ je kompaktní operátor.

Návod: *Ukažte, že funkce v obrazu jednotkové koule jsou 1-lipschitzovské a použijte předchozí příklad.*

Příklad 38. Nechť $k \in \mathcal{C}([0,1]^2)$. Pro $f \in \mathcal{C}([0,1])$ definujme

$$Tf(t) = \int_0^1 f(s)k(s,t)\,\mathrm{d}s, \quad t \in [0,1].$$

(1) Ukažte, že $T \in L(\mathcal{C}([0,1]))$.
(2) Ukažte, že operátor T je kompaktní.

Návod: *(1) K důkazu spojitosti funkce Tf lze použít například větu o spojité závislosti integrálu na parametru. Nebo lze rovnou dokazovat silnější tvrzení v (2). (2) Použijte větu Arzelà-Ascoliovu. Stejnou spojitost příslušných funkcí odvoďte ze stejnoměrné spojitosti k.*

Příklad 39. Nechť $k \in L^2([0,1]^2)$. Pro $f \in L^2([0,1])$ definujme

$$Tf(t) = \int_0^1 f(s)k(s,t)\,\mathrm{d}s, \quad t \in [0,1].$$

(1) Ukažte, že $T \in L(L^2([0,1]))$.
(2) Ukažte, že operátor T je kompaktní.

`Návod:` *(1) Nejprve s použitím Fubiniovy věty a Cauchy-Schwarzovy nerovnosti ukažte, že funkce $(s,t) \mapsto f(s)k(s,t)$ je integrovatelná na $[0,1]^2$. Následně použijte podobný výpočet k důkazu toho, že $Tf \in L^2([0,1])$ a k odhadu normy T. (2) Ukažte, že funkce tvaru $(s,t) \mapsto \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \alpha_{ij}\chi_{A_j}(s)\chi_{B_j}(t)$ jsou husté v $L^2([0,1]^2)$. Nechť (k_n) je posloupnost funkcí tohoto tvaru konvergující v $L^2([0,1]^2)$ ke k. Definujte operátory T_n stejným vzorcem jako T s k_n na místě k. Ukažte, že T_n jsou konečnědimenzionální a $T_n \to T$ v $L(L^2([0,1]))$.*

K oddílům III.5 a III.6 – spektrum omezeného lineárního operátoru, spektrum kompaktních operátorů

Poznámka. V tomto oddílu jsou všechny prostory komplexní.

Příklad 40. Nechť X je Banachův prostor a $S_1, S_2, T \in L(X)$ splňují $S_1T = TS_2 = \mathrm{Id}$. Ukažte, že $S_1 = S_2 = T^{-1}$, a tedy T je invertibilní.

Příklad 41. Nechť X je Banachův prostor a $P \in L(X)$ je projekce. Popište $\sigma(P)$, $\sigma_p(P)$ a napište vzorec pro rezolventní funkci.

Příklad 42. Nechť X je Banachův prostor a $T \in L(X)$.

(1) Nechť T je invertibilní (tj. T je izomorfismus X na X). Ukažte, že

$$\sigma(T^{-1}) = \left\{ \frac{1}{\lambda}; \lambda \in \sigma(T) \right\}.$$

(2) Nechť T je izometrie X na X. Ukažte, že $\sigma(T) \subset \{\lambda \in \mathbb{C}; |\lambda| = 1\}$.

Příklad 43. Nechť X je Banachův prostor a $T \in L(X)$. Ukažte, že platí

$$\sigma(T^2) = \{\lambda^2; \lambda \in \sigma(T)\}.$$

`Návod:` *Ukažte, že $\lambda^2 \mathrm{Id} - T^2 = (\lambda \mathrm{Id} - T)(\lambda \mathrm{Id} + T) = (\lambda \mathrm{Id} + T)(\lambda \mathrm{Id} - T)$. Z toho odvoďte, že $\lambda^2 \mathrm{Id} - T^2$ je invertibilní, právě když $\lambda \mathrm{Id} + T$ i $\lambda \mathrm{Id} - T$ jsou invertibilní.*

Příklad 44. Nechť H je Hilbertův prostor a $T \in L(H)$. Ukažte, že $\sigma(T^*) = \{\overline{\lambda}; \lambda \in \sigma(T)\}$.

Příklad 45. Nechť $X = c_0$ nebo $X = \ell^p$ pro nějaké $p \in [1,\infty)$. Nechť (a_n) je omezená posloupnost komplexních čísel. Definujme operátor $T \in L(X)$ předpisem

$$T((x_n)) = (a_n x_n), \quad (x_n) \in X.$$

(1) Ukažte, že T je opravdu spojitý lineární operátor na X splňující $\|T\| = \|(a_n)\|_\infty$.
(2) Ukažte, že T je kompaktní, právě když $a_n \to 0$.
(3) Najděte $\sigma_p(T)$.
(4) Najděte $\sigma(T)$.

`Návod:` *(2) Pokud $a_n \not\to 0$, použijte Větičku III.22, pokud $a_n \to 0$, ukažte, že T je limitou konečnědimenzionálních operátorů (v normě $L(X)$). (3,4) Vyzkoumejte, za jakých podmínek je T prostý respektive invertibilní; a pak využijte faktu, že operátor $\lambda \mathrm{Id} - T$ je podobného tvaru.*

Příklad 46. Nechť $X = L^p([0,1])$ pro nějaké $p \in [1,\infty)$ a $g \in L^\infty([0,1])$. Definujme operátor $T \in L(X)$ předpisem

$$T(f) = fg, \quad f \in X.$$

(1) Ukažte, že T je opravdu spojitý lineární operátor na X splňující $\|T\| = \|g\|_\infty$.
(2) Ukažte, že $\sigma_p(T) = \{\lambda \in \mathbb{C}; g^{-1}(\lambda) \text{ je kladné míry}\}$.
(3) Ukažte, že $\sigma(T)$ je esenciální obor hodnot g.
(4) Ukažte, že T je kompaktní pouze v případě $g = 0$.

`Návod:` *(3) Nejprve zjistěte, kdy T je invertibilní. Přitom odvoďte, jaký musí být tvar T^{-1} a použijte na inverzní operátor odhady z (1). Dále použijte fakt, že operátor $\lambda \operatorname{Id} - T$ je téhož typu jako T. (4) Ukažte, že pokud má T nenulové vlastní číslo, pak jeho zúžení na vhodný nekonečněrozměrný podprostor X je izomorfismus (využijte (2)), a tedy T není kompaktní. Z Věty III.32 z přednášky a (3) pak odvoďte, že, je-li T kompaktní, esenciální obor hodnot g musí být $\{0\}$.*