ÚVOD DO FUNKCIONÁLNÍ ANALÝZY

PŘÍKLADY PRO POROZUMĚNÍ LÁTCE – ZS 2015/2016

PŘÍKLADY KE KAPITOLE IV

K oddílu IV.1 – testovací funkce a slabé derivace

Příklad 1. Označme
$$\mathcal{W}((a,b)) = \{f \in L^1_{\mathrm{loc}}((a,b)); f \text{ má slabou derivaci v } L^1_{\mathrm{loc}}((a,b))\}.$$
Pro $f \in \mathcal{W}((a,b))$ nechť f' značí slabou derivaci funkce f. Nechť $p \in [1,\infty]$. Nechť
$$W^{1,p}((a,b)) = \{f \in \mathcal{W}((a,b)); f \in L^p((a,b)) \text{ a } f' \in L^p((a,b))\}.$$
Pro $f \in W^{1,p}$ položme
$$\|f\|_{1,p} = \|f\|_p + \|f'\|_p .$$
Ukažte, že $(W^{1,p}((a,b)), \|\cdot\|_{1,p})$ je Banachův prostor a že v případě $p = 2$ je to Hilbertův prostor.

`Návod:` *Ukažte, že $f \mapsto (f, f')$ je izometrie $W^{1,p}((a,b))$ na uzavřený podprostor $(L^p((a,b)) \times L^p((a,b)), \|\cdot\|_p)$.*

Příklad 2. Ukažte, že prostor $W^{1,1}((0,1))$ je izomorfní prostoru $AC([0,1])$ z Příkladu I.15.

`Návod:` *Použijte Větu IV.8(b) z přednášky.*

Příklad 3. Ukažte, že funkce třídy $\mathcal{C}^\infty$ na $[a,b]$ tvoří hustý podprostor $W^{1,p}((a,b))$ pro každé $p \in [1,\infty)$.

`Návod:` *Nechť $f \in W^{1,p}((a,b))$. S využitím Důsledku IV.3 z přednášky aproximujte f' pomocí testovací funkce a vezměte vhodnou primitivní funkci k této testovací funkci.*

Příklad 4. Ukažte, že $\mathscr{D}((0,1))$ není hustý podprostor $W^{1,1}((0,1))$.

`Návod:` *Uvažte funkci konstantě rovnou jedné.*

Příklad 5. Ukažte, že funkce $f(t) = \log|t|$ patří do $L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R})$, ale nemá slabou derivaci v $L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R})$.

`Návod:` *Pokud by funkce $g \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R})$ byla slabou derivací f na $\mathbb{R}$, pak $g|_{(0,\infty)}$ by byla slabou derivací $f|_{(0,\infty)}$ na $(0,\infty)$.*

Příklad 6.
(1) Ukažte, že každá $f \in L^1_{\mathrm{loc}}((a,b))$ je slabou derivací nějaké spojité funkce na (a,b).
(2) Ukažte, že každá znaménková či komplexní regulární borelovská míra na (a,b) je slabou derivací nějaké zprava spojité funkce na (a,b).
(3) Ukažte, že znaménková či komplexní regulární borelovská míra μ na (a,b) je slabou derivací nějaké spojité funkce na (a,b), právě když $\mu(\{x\}) = 0$ pro každé $x \in (a,b)$.

Příklad 7. Najděte takovou spojitou funkci na $[0,1]$, že žádná míra na $(0,1)$ není její slabou derivací.

Příklad 8. Pro každé $n \in \mathbb{N}$ najděte funkci $\varphi_n \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$ takovou, že $\varphi_n(0) = \varphi_n'(0) = \dots = \varphi_n^{(n-1)}(0) = 0$ a $\varphi_n^{(n)}(0) \neq 0$.

`Návod:` *Zvolte $\varphi_n(x) = x^n\psi(x)$ pro vhodné ψ.*

Příklad 9. Pro každý multiindex $\alpha \in \mathbb{N}_0^d$ najděte $\varphi_\alpha \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^d)$, pro kterou platí $D^\beta\varphi_\alpha(0) = 0$ pro každé $\beta < \alpha$ a $D^\alpha\varphi_\alpha(0) \neq 0$.

`Návod:` *Zvolte $\varphi_\alpha(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}^\alpha\psi(\boldsymbol{x})$ pro vhodné ψ.*

K oddílu IV.2 – distribuce a operace s nimi

Příklad 10. Najděte posloupnost $(\varphi_n) \subset \mathscr{D}(\mathbb{R})$ takovou, že pro každé $k \in \mathbb{N}_0$ je $\varphi_n^{(k)} \rightrightarrows 0$ na $\mathbb{R}$, ale φ_n nekonverguje k nule v $\mathscr{D}(\mathbb{R})$.

Příklad 11. Najděte posloupnost $(\varphi_n) \subset \mathscr{D}((0,1))$ takovou, že pro každé $k \in \mathbb{N}_0$ je $\varphi_n^{(k)} \rightrightarrows 0$ na $(0,1)$, ale φ_n nekonverguje k nule v $\mathscr{D}((0,1))$.

Příklad 12. Pro $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$ definujme

$$\Lambda_{1/x}(\varphi) = \lim_{\varepsilon\to 0+}\left(\int_{-\infty}^{-\varepsilon}\frac{\varphi(x)}{x}\,\mathrm{d}x + \int_{\varepsilon}^{\infty}\frac{\varphi(x)}{x}\,\mathrm{d}x\right)$$

(1) Ukažte, že $\Lambda_{1/x}$ je distribuce na $\mathbb{R}$.
(2) Ukažte, že $\Lambda_{1/x}|_{\mathscr{D}((0,\infty))}$ je tvaru Λ_f, kde $f \in L^1_{\mathrm{loc}}((0,\infty))$ (tj. $\Lambda_{1/x}|_{\mathscr{D}((0,\infty))}$ je regulární distribuce), ale $\Lambda_{1/x}$ není regulární distribuce (tj., není tvaru Λ_f, kde $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R})$).
(3) Ukažte, že $\Lambda_{1/x}$ je derivací regulární distribuce Λ_g, kde $g(x) = \log|x|$.
(4) Spočtěte derivaci distribuce $\Lambda_{1/x}$.

Příklad 13. Nechť $\Lambda_{1/x}$ je distribuce z předchozího příkladu, δ_0 je Diracova míra nesená v nule a $f(x) = x$, $x \in \mathbb{R}$.
(1) Ukažte, že $f \cdot \Lambda_{1/x} = \Lambda_1$.
(2) Ukažte, že $f \cdot \Lambda_{\delta_0} = 0$.
(3) Ukažte, že na $\mathscr{D}'(\mathbb{R})$ nelze zavést asociativní násobení, aby splňovalo $\Lambda_f \cdot U = f \cdot U$ pro $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ a $U \in \mathscr{D}'(\mathbb{R})$.

Příklad 14. Které z následujících vzorců definují distribuci na $\mathbb{R}$?
(1) $\Lambda(\varphi) = \sum_{n=1}^\infty \varphi(n)$.
(2) $\Lambda(\varphi) = \sum_{n=1}^\infty n\varphi(n)$.
(3) $\Lambda(\varphi) = \sum_{n=1}^\infty n! \cdot \varphi(n)$.
(4) $\Lambda(\varphi) = \sum_{n=1}^\infty \varphi(\frac{1}{n})$.
(5) $\Lambda(\varphi) = \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n}\varphi(\frac{1}{n})$.
(6) $\Lambda(\varphi) = \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^2}\varphi(\frac{1}{n})$.

Příklad 15. Které z vzorců z předchozího příkladu definují distribuci na $(0,\infty)$?

Příklad 16. Nechť $f = \frac{1}{2}\chi_{\{(t,x)\in\mathbb{R}^2;\, t>|x|\}}$.
(1) Ukažte, že $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^2)$.
(2) Ukažte, že $D^{(2,0)}\Lambda_f - D^{(0,2)}\Lambda_f = \Lambda_{\delta_{(0,0)}}$, tj. „$f$ řeší rovnici $\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \delta_{(0,0)}$ v distribucích“.

`Návod:` *Použijte definice, Fubiniovu větu a integraci per partes.*

Příklad 17. Najděte funkci f, která je nulová na $(-\infty,0)$ a třídy $\mathcal{C}^\infty$ na $[0,\infty)$, která „řeší rovnici $y'' + y = \delta_0$ v distribucích,“ tj. pro kterou platí $(\Lambda_f)'' + \Lambda_f = \Lambda_{\delta_0}$.

`Návod:` *Nejprve do rovnice dosaďte libovolné $\varphi \in \mathscr{D}((0,\infty))$. S použitím definic, integrace per partes a Lemmatu IV.6 z přednášky ukažte, že f musí na $(0,\infty)$ řešit diferenciální rovnici $y'' + y = 0$. Pro určení, které z jejích řešení dává hledanou funkci f dosaďte do rovnice funkci φ_1 z Příkladu 8.*

K oddílu IV.3 – další vlastnosti distribucí

Příklad 18. Pro $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^2)$ položme
$$T(\varphi) = \int_{U(0,1)} \frac{\varphi(\boldsymbol{x}) - \varphi(0)}{\|\boldsymbol{x}\|^2}\,\mathrm{d}\boldsymbol{x} + \int_{\mathbb{R}^2\setminus U(0,1)} \frac{\varphi(\boldsymbol{x})}{\|\boldsymbol{x}\|^2}\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}.$$

(1) Ukažte, že $T \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^2)$.
(2) Ukažte, že $f \cdot T = \Lambda_1$, kde $f(\boldsymbol{x}) = \|\boldsymbol{x}\|^2$.

`Návod:` *(1) Druhý sčítanec je regulární distribuce. V prvním sčítanci rozdíl $\varphi(\boldsymbol{x}) - \varphi(0)$ vyjádřete jako integrál z derivace pomocí Newton-Leibnizovy formule, použijte Cauchy-Schwarzovu nerovnost a skutečnost, že funkce $\boldsymbol{x} \mapsto \frac{1}{\|x\|}$ je integrovatelná na $U(0,1)$ (to lze spočíst pomocí polárních souřadnic) k důkazu, že jde o distribuci prvního řádu.*

Příklad 19. Nechť $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^d)$. Pro $r > 0$ definujme funkci φ_r předpisem $\varphi_r(\boldsymbol{x}) = \varphi(r\boldsymbol{x})$, $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^d$.

(1) Ukažte, že $\varphi_r \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^d)$.
(2) Je-li $r > 1$, ukažte, že pro každé $N \in \mathbb{N}_0$ platí $\|\varphi\|_N \le \|\varphi_r\|_N \le r^N \|\varphi\|_N$.
(3) Je-li $r \in (0,1)$, ukažte, že pro každé $N \in \mathbb{N}_0$ platí $r^N \|\varphi\|_N \le \|\varphi_r\|_N \le \|\varphi\|_N$.

`Návod:` *Použijte příslušné definice a větu o derivaci složené funkce.*

Příklad 20. Které z následujících vzorců definují distribuci na $\mathbb{R}$?

(1) $\Lambda(\varphi) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi^{(n)}(n)$.
(2) $\Lambda(\varphi) = \sum_{n=1}^{\infty} n\varphi^{(n)}(n)$.
(3) $\Lambda(\varphi) = \sum_{n=1}^{\infty} n! \cdot \varphi^{(n)}(n)$.
(4) $\Lambda(\varphi) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi^{(n)}(\frac{1}{n})$.
(5) $\Lambda(\varphi) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}\varphi^{(n)}(\frac{1}{n})$.
(6) $\Lambda(\varphi) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}\varphi^{(n)}(\frac{1}{n})$.

`Návod:` *(4)–(6) Použijte charakterizaci distribucí podle Věty IV.13 z přednášky Příklady 8 a 20.*

Příklad 21. Které z vzorců z předchozího příkladu definují distribuci na $(0,\infty)$? Jsou konečného řádu?

`Návod:` *Použijte příslušné definice a Příklady 8 a 20.*