

---

# NMFM301 – Statistika pro finanční matematiky

Pořádkové statistiky. Nestrannost a konsistence odhadů

Podrobné riešenie príkladov z 2. cvičenia

---

## A Vzorové příklady s podrobným řešením

Nechť  $X_1, \dots, X_n$  je náhodný výběr ze spojitého rozdělení s distribuční funkcí  $F$  a hustotou  $f$ .

**A1.** Nechť  $n = 2k + 1$ .

- Najděte hustotu prostředního pozorování  $X_{(k+1)}$ . [Tato statistika se nazývá výběrový medián.]

Řešení:

Obecně (podľa Vety 1.9 z prednášky) platí, že hustota  $k$ -tej pořadovej statistiky vzhľadom k Lebesgueovej miere je

$$f_{(k)}(x) = n \binom{n-1}{k-1} f(x) F^{k-1}(x) [1 - F(x)]^{n-k}, \quad \text{pre } x \in \mathbb{R}.$$

Pre nepárny (lichý) rozsah náhodného výberu (keďže  $n = 2k + 1$ ) je výberový medián ( $k + 1$ ) poradová štatistika s príslušnou hustotou

$$f_{(k+1)}(x) = n \binom{2k}{k} f(x) F^k(x) [1 - F(x)]^k,$$

opäť pre všetky  $x \in \mathbb{R}$ .

- Nechť  $X_i$  má rovnomerné rozdelení na intervale  $(0, 1)$ . Spočítejte  $E X_{(k+1)}$  a  $\text{var } X_{(k+1)}$ .

Řešení:

Keďže náhodné veličiny  $X_1, \dots, X_n$  pochádzajú z rovnomerného rozdelenia na intervale  $(0, 1)$ , t.j.,  $X_i \sim R(0, 1)$ , tak hustota výberového mediánu, t.j., náhodnej veličiny  $X_{(k+1)}$  je

$$f_{(k+1)}(x) = n \binom{2k}{k} x^k (1-x)^k, \quad x \in (0, 1)$$

a  $f_{(k+1)}(x) = 0$  pre  $x \notin (0, 1)$ . To je hustota náhodnej veličiny s Beta rozdelením s parametrami  $\alpha = k + 1$  a  $\beta = k + 1$ . To znamená, že výberový medián náhodných veličín  $X_1, \dots, X_n$  z rovnomerného rozdelenia na intervale  $(0, 1)$  (pre  $n = 2k + 1$ ) má Beta rozdelenie, t.j.,  $X_{(k+1)} \sim \text{Beta}(k + 1, k + 1)$ . Pre strednú hodnotu a rozptyl zároveň platí, že

$$E X_{(k+1)} = \frac{\alpha}{\alpha + \beta} = \frac{k + 1}{2(k + 1)} = \frac{1}{2},$$
$$\text{var } X_{(k+1)} = \frac{\alpha\beta}{(\alpha + \beta)^2(\alpha + \beta + 1)} = \frac{(k + 1)^2}{4(\alpha + \beta)^2(2k + 3)} = \frac{1}{4(2k + 3)} = \frac{1}{4(n + 2)}.$$

- Nechť  $X_i \sim R(0, \theta)$ . Je  $X_{(k+1)}$  nestranným a/nebo konsistentním odhadem mediánu rozdělení  $R(0, \theta)$ ? [Použijte tvrzení P.7.5]

Řešení:

V prvom rade je nutné si uvedomiť jednoduchý fakt, že ak  $X_i \sim R(0, 1)$ , tak potom platí, že  $\theta X_i \sim R(0, \theta)$ , pro libovolné  $\theta > 0$ . Pokud teda  $X_i \sim R(0, \theta)$ , pre nejaké  $\theta > 0$ , tak potom

$$EX_{(k+1)} = \frac{\theta}{2} \quad \text{a tiež} \quad \text{var } X_{(k+1)} = \frac{\theta^2}{4(n+2)}.$$

Keďže medián náhodnej veličiny s rovnomerným rozdelením na intervale  $(0, \theta) \subset \mathbb{R}$  je  $\theta/2$ , tak náhodná veličina  $X_{(k+1)}$  je nestranným odhadom teoretického mediánu. Keďže navyše platí aj

$$\text{var } X_{(k+1)} = \frac{\theta^2}{4(n+2)} \rightarrow 0, \quad \text{pre } n \rightarrow \infty,$$

tak  $X_{(k+1)}$  je zároveň aj konsistentným odhadom teoretického mediánu, t.j., parametru  $\tilde{\theta} = \frac{\theta}{2}$ .

**A2.** Nechť  $X_i$  má exponenciální rozdělení s parametrem 1.

- Definujte

$$Z_1 = nX_{(1)}, \quad Z_k = (n - k + 1)(X_{(k)} - X_{(k-1)}), \quad k = 2, \dots, n.$$

Ukažte, že  $Z_1, \dots, Z_n$  jsou nezávislé stejně rozdělené náhodné veličiny s rozdělením  $\text{Exp}(1)$ .

Řešení:

Z prednášky už vieme, že združená hustota náhodného vektoru  $(X_{(1)}, \dots, X_{(n)})^\top$  je

$$f(y_1, \dots, y_n) = n! f(y_1) \cdots f(y_n), \quad \text{pre } y_1 < \cdots < y_n$$

a  $f(y_1, \dots, y_n) = 0$  inak (Veta 1.7 z prednášky). Keďže náhodné veličiny  $X_1, \dots, X_n$  majú exponenciálne rozdelenie s parametrom  $\lambda = 1$ , tak zároveň vieme, že pre hustotu  $X_i$  platí

$$f(x) = e^{-x} \cdot \mathbb{I}_{\{x>0\}}$$

a  $EX_i = \text{var } X_i = 1$ . Pre združenú hustotu  $f(y_1, \dots, y_n)$  preto platí

$$f(y_1, \dots, y_n) = n! e^{-\sum_{i=1}^n y_i}, \quad \text{pre } y_1 < \cdots < y_n$$

a  $f(y_1, \dots, y_n) = 0$  inak. Následne súčet v exponente zapíšeme iným spôsobom:

$$\sum_{i=1}^n y_i = \sum_{i=1}^n (n - i + 1)(y_i - y_{i-1}),$$

kde jsme dodefinovali počiatočnú hodnotu  $y_0 = 0$ .

Združenú hustotu teda môžeme teda zapísať ako

$$f(y_1, \dots, y_n) = n! e^{-\sum_{i=1}^n (n-i+1)(y_i - y_{i-1})}, \quad \text{opäť pre } y_1 < \dots < y_n$$

a  $f(y_1, \dots, y_n) = 0$  inak. Použijeme transformáciu  $t : (y_1, \dots, y_n) \rightarrow (z_1, \dots, z_n)$  definovanú (podľa zadania) následovne:

$$\begin{aligned} z_1 &= ny_1 \\ z_2 &= (n-1)(y_2 - y_1) \\ &\dots\dots \\ z_i &= (n-i+1)(y_i - y_{i-1}) \\ &\dots\dots \\ z_n &= 1 \cdot (y_n - y_{n-1}). \end{aligned}$$

Keďže  $y_1 < \dots < y_n$  (resp. stačí nam riešiť tento prípad), tak zároveň dostávame, že  $z_i > 0$  pre  $\forall i \in \{1, \dots, n\}$ . Pre inverznú transformáciu  $t^{-1} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  platí:

$$\begin{aligned} y_1 &= \frac{1}{n} z_1 \\ y_2 &= \frac{z_2}{n-1} + y_1 = \sum_{j=1}^2 \frac{z_j}{n-j+1} \\ &\dots\dots \\ y_i &= \frac{z_i}{n-i+1} + y_{i-1} = \sum_{j=1}^i \frac{z_j}{n-j+1} \quad (\star) \\ &\dots\dots \\ y_n &= \sum_{j=1}^n \frac{z_j}{n-j+1}. \end{aligned}$$

Pre Jakobián tihto inverzného zorazenia platí, že

$$|J_{t^{-1}}(z_1, \dots, z_n)| = \left| \frac{\partial t^{-1}}{\partial \mathbf{z}}(\mathbf{z}) \right| = \begin{vmatrix} \frac{1}{n} & 0 & \dots & \dots & 0 \\ \frac{1}{n} & \frac{1}{n-1} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ \frac{1}{n} & \frac{1}{n-1} & \frac{1}{n-2} & \dots & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{n!},$$

kde jsme využili značenie  $\mathbf{z} = (z_1, \dots, z_n)^\top$ .

Združené rozdelenie náhodného vektoru  $(Z_1, \dots, Z_n)^\top$  (definovaného transformáciou  $t$  z náhodného vektoru  $(X_{(1)}, \dots, X_{(n)})^\top$ ) získame pomocou vety o transformácii

$$\begin{aligned} f_{\mathbf{Z}}(z_1, \dots, z_n) &= f_{\mathbf{X}_{(\cdot)}}(t^{-1}(z_1, \dots, z_n)) \cdot \left| \frac{\partial t^{-1}}{\partial \mathbf{z}}(\mathbf{z}) \right| \\ &= e^{-\sum_{i=1}^n z_i}, \quad \text{pre } z_i > 0, \end{aligned}$$

kde  $f_{\mathbf{Z}}$  značí združenú hustotu náhodného vektoru  $(Z_1, \dots, Z_n)^\top$  a  $f_{\mathbf{X}_{(\cdot)}}$  je združená hustota usporiadaného náhodného vektoru  $(X_{(1)}, \dots, X_{(n)})^\top$ . Zároveň platí, že hustota je nulová pre ľubovoľné  $z_i \leq 0$ . Keďže navyiac je možné hustotu faktorizovať v zmysle

$$f_{\mathbf{Z}}(z_1, \dots, z_n) = f_{Z_1}(z_1) \cdots f_{Z_n}(z_n) = e^{-z_1} \cdots e^{-z_n},$$

pre všetky  $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ , tak náhodné veličiny  $Z_1, \dots, Z_n$  sú nezávislé.

- Vyjádřete  $X_{(r)}$  pomocí lineární kombinace veličin  $Z_1, \dots, Z_n$  a pomocí tohoto vztahu spočítejte  $E X_{(r)}$  a  $\text{var } X_{(r)}$  (pro libovolné  $r = 1, \dots, n$ ).

Řešení:

Pro libovolné  $r \in \{1, \dots, n\}$  už vieme z použitej transformácie – konkrétne z výrazu v ( $\star$ ), že platí

$$X_{(r)} = g(Z_1, \dots, Z_n) = \sum_{j=1}^r \frac{Z_j}{n-j+1}.$$

Keďže platí, že  $Z_1, \dots, Z_n \sim \text{Exp}(1)$  tak pre strednú hodnotu  $X_{(r)}$  platí

$$E X_{(r)} = E \left[ \sum_{j=1}^r \frac{Z_j}{n-j+1} \right] = \sum_{j=1}^r \frac{E Z_j}{n-j+1} = \sum_{j=1}^r \frac{1}{n-j+1}$$

a pre rozptyl platí

$$\text{var } X_{(r)} = \sum_{j=1}^r \frac{\text{var } Z_j}{(n-j+1)^2} = \sum_{j=1}^r \frac{1}{(n-j+1)^2},$$

pričom prvá rovnosť v poslednom riadku plynie z nezávislosti náhodných veličín  $Z_1, \dots, Z_n$ .

- Nechť  $X_i \sim \text{Exp}(\lambda)$  a  $n = 2k + 1$ . Je  $X_{(k+1)}$  nestranným a/nebo konsistentním odhadem mediánu rozdění  $\text{Exp}(\lambda)$ ?

Řešení:

Nechť  $X_i \sim \text{Exp}(\lambda)$ , tak, že  $E X_i = \frac{1}{\lambda}$ , pre  $\lambda > 0$ . Potom nutne  $\lambda X_i \sim \text{Exp}(1)$  a tudíž  $E[\lambda X_i] = \lambda \cdot \frac{1}{\lambda} = 1$ . Tym pádom dostaneme aj

$$E X_{(k+1)} = \frac{1}{\lambda} E[\lambda X_{(k+1)}] = \frac{1}{\lambda} \sum_{j=1}^{k+1} \frac{E[\lambda X_j]}{n-j+1} = \frac{1}{\lambda} \sum_{j=1}^{k+1} \frac{1}{n-j+1}$$

a tiež

$$\text{var } X_{(k+1)} = \frac{1}{\lambda^2} \text{var} [\lambda X_{(k+1)}] = \frac{1}{\lambda^2} \sum_{j=1}^{k+1} \frac{\text{var} [\lambda X_j]}{(n-j+1)^2} = \frac{1}{\lambda^2} \sum_{j=1}^{k+1} \frac{1}{(n-j+1)^2},$$

kde druhá rovnosť predchádzajúceho výrazu plynie (opäť) z nezávislosti náhodných veličín  $X_1, \dots, X_n$ . Pre medián náhodných veličín  $X_i \sim \text{Exp}\lambda$  platí, že je to hodnota  $x_m \in \mathbb{R}$  taková, že

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} &= 1 - e^{-\lambda x_m} \\ \frac{1}{2} &= e^{-\lambda x_m} \\ x_m &= \frac{1}{\lambda} \log 2. \end{aligned}$$

Je zrejmé, že zároveň dostávame

$$E X_{(k+1)} = \frac{1}{\lambda} \left( \frac{1}{n} + \frac{1}{n-1} + \dots + \frac{1}{n-k} \right) \neq \frac{1}{\lambda} \log 2,$$

takže náhodná veličina  $X_{(k+1)}$  nie je nestranným odhadom pre teoretický medián  $x_m = \frac{1}{\lambda} \log 2$ . Ukážeme ale, že sa jedná o asymptoticky nestranný odhad (t.j.,  $E X_{(k+1)} \rightarrow \frac{1}{\lambda} \log 2$ , pre  $n \rightarrow \infty$ , kde  $k = \frac{n-1}{2}$ ).

Využijeme k tomu tzv. Euler–Mascheroni konštantu  $C = 0.5772\dots$ , ktorá je definovaná ako limita

$$C = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \log n \right).$$

Porovnáme dva čiastočné súčty pre ľubovoľné nepárne (liché)  $n \in \mathbb{N}$  a  $\frac{n+1}{2}$ :

$$\begin{aligned} 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{\frac{n-1}{2}} + \dots + \frac{1}{n} - \log n &\rightarrow C && \text{pre } n \rightarrow \infty; \\ 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{\frac{n-1}{2}} - \log \frac{n-1}{2} &\rightarrow C && \text{tiež pre } n \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Odčítaním hodnôt po stĺpcoch a uvedomením si faktu, že  $\frac{1}{\frac{n-1}{2}+1} = \frac{1}{\frac{n+1}{2}} = \frac{1}{n-k}$ , dostaneme

$$\left( \frac{1}{n-k} + \dots + \frac{1}{n} \right) - \left( \log n - \log \frac{n-1}{2} \right) \rightarrow (C - C) = 0 \quad \text{pre } n \rightarrow \infty$$

a preto tiež platí, že

$$\lim_{n \rightarrow \infty} EX_{(k+1)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[ \frac{1}{\lambda} \left( \frac{1}{n-k} + \dots + \frac{1}{n} \right) \right] = \frac{1}{\lambda} \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \log n - \log \frac{n-1}{2} \right),$$

pričom platí, že

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \log n - \log \frac{n-1}{2} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \log 2 - \log \frac{n}{n-1} \right) = \log 2.$$

Jedná sa teda o asymptotický nestranný odhad teoretického mediánu  $x_m \in \mathbb{R}$ . Pro konzistenciu ešte ukážeme, že  $\text{var } X_{(k+1)} \rightarrow 0$ . Platí, že

$$\text{var } X_{(k+1)} = \frac{1}{\lambda^2} \left( \frac{1}{n^2} + \dots + \frac{1}{(n-k)^2} \right),$$

a tiež, že  $\sum_{i=1}^n \frac{1}{i^2} \rightarrow \frac{\pi^2}{6}$  pre  $n \rightarrow \infty$ . Túto konvergentnú sumu ale môžeme rozpísať na dve časti

$$\sum_{i=1}^n \frac{1}{i^2} = \sum_{i=1}^{\frac{n-1}{2}} \frac{1}{i^2} + \sum_{i=\frac{n+1}{2}}^n \frac{1}{i^2} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{\pi^2}{6},$$

pričom platí, že

$$\sum_{i=1}^{\frac{n-1}{2}} \frac{1}{i^2} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{\pi^2}{6},$$

pre  $n$  idúce do nekonečna a tým pádom druhá suma (zbytok) konverguje k nule, t.j.

$$\sum_{i=\frac{n+1}{2}}^n \frac{1}{i^2} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Konečne teda dostávame, že  $\text{var } X_{(k+1)} \rightarrow 0$  a náhodná veličina  $X_{(k+1)}$  (resp.  $(k+1)$ -vá poradová štatistika) je konzistentným odhadom teoretického mediánu  $x_m \in \mathbb{R}$ .

**A3.** Nechť  $X_i$  má rozdelení  $R(\theta_1, \theta_2)$ . Najdte nestranné odhady parametrov  $\theta_1$  a  $\theta_2$  založené na maximu  $X_{(n)}$  a minimu  $X_{(1)}$ .

Řešení:

Je zrejmé, že transformované náhodné veličiny  $X_i - \theta_1$  pre  $i = 1, \dots, n$  majú rovnomerné rozdelenie na intervale  $(0, \theta_2 - \theta_1)$ , t.j.,  $X_1 - \theta_1, \dots, X_n - \theta_1 \sim R(0, \theta_2 - \theta_1)$ . Zároveň ale náhodné veličiny  $Z_i \equiv (X_i - \theta_1)/(\theta_2 - \theta_1)$  pre  $i = 1, \dots, n$  majú rovnomerné rozdelenie na intervale  $(0, 1)$ .

Pre  $Z_1, \dots, Z_n \sim R(0, 1)$  už vieme, že (opakovanie)

$$\begin{aligned} Z_{(n)} \text{ má hustotu } f_{(n)}(x) &= nx^{n-1} && \text{pre } x \in (0, 1) \text{ a nula inak;} \\ Z_{(1)} \text{ má hustotu } f_{(1)}(x) &= n(1-x)^{n-1} && \text{pre } x \in (0, 1) \text{ a nula inak.} \end{aligned}$$

To znamená, že pre strednú hodnotu dostaneme

$$EZ_{(n)} = E\left[\frac{X_{(n)} - \theta_1}{\theta_2 - \theta_1}\right] = \int_{-\infty}^{\infty} x f_{(n)}(x) dx = \int_0^1 nx^n dx = \frac{n}{n+1};$$

a podobne aj

$$EZ_{(1)} = E\left[\frac{X_{(1)} - \theta_1}{\theta_2 - \theta_1}\right] = \int_{-\infty}^{\infty} x f_{(1)}(x) dx = \int_0^1 nx(1-x)^{n-1} dx = \frac{1}{n+1}.$$

(resp. je možné priamo využiť Beta rozdelenie—viď riešenie príkladu A1(b))

Vďaka linearite strednej hodnoty ale z tohto dokážeme vyjadriť aj stredné hodnoty  $EX_{(n)}$  a  $EX_{(1)}$  ako funkcie neznámych parametrov  $\theta_1, \theta_2 \in \mathbb{R}$ , takých, že  $\theta_1 < \theta_2$ . Dostávame

$$EX_{(n)} = \frac{n}{n+1}\theta_2 + \frac{1}{n+1}\theta_1$$

a tiež

$$EX_{(1)} = \frac{n}{n+1}\theta_1 + \frac{1}{n+1}\theta_2.$$

To je ale sústava dvoch rovníc pre dve nezáme ( $\theta_1$  a  $\theta_2$ ). Riešením sústavy rovníc dostaneme riešenie:

$$\theta_1 = \frac{n+1}{n^2+1}(nEX_{(1)} - EX_{(n)}) \quad \text{a} \quad \theta_2 = \frac{n+1}{n^2+1}(nEX_{(n)} - EX_{(1)}).$$

Príslušné nestranné odhady pre parametre  $\theta_1, \theta_2 \in \mathbb{R}$  sú

$$\hat{\theta}_1 = \frac{n+1}{n^2+1}(nX_{(1)} - X_{(n)}) \quad \text{a} \quad \hat{\theta}_2 = \frac{n+1}{n^2+1}(nX_{(n)} - X_{(1)}).$$

(pretože  $E\hat{\theta}_1 = \frac{n+1}{n^2+1}(nEX_{(1)} - EX_{(n)}) = \theta_1$  a  $E\hat{\theta}_2 = \frac{n+1}{n^2+1}(nEX_{(n)} - EX_{(1)}) = \theta_2$ )

**A4.** Pro náhodný výber  $X_1, \dots, X_n$  z Poissonova rozdelení s parametrom  $\lambda > 0$  ukažte, že  $\hat{p}_0 = (1 - \frac{1}{n})^{nX_n}$  je nestranným a konzistentným odhadem  $p_0 = \mathbb{P}[X_1 = 0]$ .

Řešení:

V prvom rade je nutné si uvedomiť tzv. generickú vlastnosť Poissonovho rozdelenia. To znamená, že pre  $X_1$  a  $X_2$  nezávislé náhodné veličiny s Poissonovým rozdelením s parametrom  $\lambda > 0$  platí,

že  $(X_1 + X_2)$  je náhodná veličina, ktorá má opäť Poissonové rozdelenie, tentokrát s parametrom  $2\lambda$  (samostatne odvodiť pomocou vety o konvolúcii). Rekurzívne teda dostaneme, že

$$\sum_{i=1}^n X_i \sim Poiss(n\lambda).$$

Túto vlastnosť využijeme pre dôkaz konzistencie, t.j. výpočet strednej hodnoty odhadu  $\hat{p}_0$ .

$$\begin{aligned} E\hat{p}_0 &= E \left[ \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n\bar{X}_n} \right] = E \left[ \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{\sum_{i=1}^n X_i} \right] \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^k \cdot P \left[ \sum_{i=1}^n X_i = k \right] = \sum_{k=0}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^k \cdot e^{-n\lambda} \frac{(n\lambda)^k}{k!} \\ &= e^{-n\lambda} \cdot \sum_{i=1}^{\infty} \left[ \left(1 - \frac{1}{n}\right)n\lambda \right]^k \cdot \frac{1}{k!} = e^{-n\lambda} \cdot e^{(1-1/n)\lambda n} = e^{-n\lambda} \cdot e^{n\lambda - \lambda} \\ &= e^{-\lambda} = e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^0}{0!} = P[X_1 = 0] = p_0. \end{aligned}$$

Tretia rovnosť plynie z definície strednej hodnoty diskkrétnej náhodnej veličiny, štvrtá rovnosť z faktu, že  $\sum X_i \sim Poiss(n\lambda)$ . Odhad  $\hat{p}_0$  pro neznámy parameter  $p_0 = P[X_1 = 0]$  je teda ne-stranným odhadom.

Pre vyšetrenie konzistencie postačí ukázať, že  $\hat{p}_0 \xrightarrow{P} p_0$  v pravdepodobnosti pre  $n \rightarrow \infty$ , resp. platí

$$\left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n\bar{X}_n} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{P} p_0.$$

Ľavú stranu rovnosti môžeme upraviť následovne:

$$\left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n\bar{X}_n} = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{\sum_{i=1}^n X_i} = \left(1 - \frac{1}{n} \cdot \frac{\sum_{i=1}^n X_i}{\sum_{i=1}^n X_i}\right)^{\sum_{i=1}^n X_i} = \left(1 - \frac{\bar{X}_n}{\sum_{i=1}^n X_i}\right)^{\sum_{i=1}^n X_i},$$

kde sme využili rozšírenie zlomku (vynásobenie) hodnotou jedna vo vhodnom tvare. Následne si stačí uvedomiť že

$$\sum_{i=1}^n X_i \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{P} \infty, \quad \text{zároveň} \quad \bar{X}_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{P} \lambda,$$

a tiež

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{a}{m}\right)^m = e^{-a}.$$

Prvé dve konvergenzie sú pritom konvergenzie v pravdepodobnosti (t.j. celočíselná nahodná veličina  $\sum X_i$  diverguje v pravdepodobnosti do nekonečna a analogicky náhodná veličina  $\bar{X}_n$  konverguje (slabě/silně)—použitím silného/slabého zákona veľkých čísel—ku svojej strednej hodnote) a posledná konvergenzia je deterministická (t.j. reálna postupnosť konverguje ku svojej limite). Použitím vety o zloženej limite (resp. vety o limite zloženej funkcie) dostávame, že

$$\left[ \left(1 - \frac{\bar{X}_n}{\sum_{i=1}^n X_i}\right)^{\sum_{i=1}^n X_i} \right] \xrightarrow[\sum X_i \rightarrow \infty]{P} e^{-\lambda}, \quad \text{pre } n \rightarrow \infty \text{ a } \sum X_i \rightarrow \infty \text{ v pravdepodobnosti.}$$

Odhad  $\hat{p}_0$  je teda silně/slabě konzistentným odhadom neznámeho parametru  $p_0 = P[X_1 = 0]$ .