Opakování

Opakování ze SŠ

1. Nalezněte reálnou a imaginární část
   a) $\dfrac{2}{1-3\mathrm{i}}$ b) $(1+\mathrm{i}\sqrt{3})^3$

2. Nalezněte velikosti a argumenty následujících komplexních čísel
   a) $-2-2\mathrm{i}$ b)$1+\mathrm{i}^{123}$

3. Dokažte
   a) $z+\overline{z}=2\mathcal{R}\mathrm{e}\, z$ b) $z-\overline{z}=2\mathrm{i}\mathcal{I}\mathrm{m}\, z$ c) $\overline{(\overline{z})}=z$
   d) $|\overline{z}|=|z|$ e) $|z_1z_2|=|z_1||z_2|$
   f) $\arg(z_1z_2)=\arg z_1+\arg z_2 \pmod{2\pi} \quad z_1,z_2\neq 0$
   g) $\arg(\frac{z_1}{z_2})=\arg z_1-\arg z_2 \pmod{2\pi} \quad z_1,z_2\neq 0$

4. Řešte v $\mathbb{C}$:
   a) $x^6+1=0$ b) $x^2+x+1=0$

5. Řešte v $\mathbb{R}$:
   a) $|x+1|+|x-1|\geq 2$ b) $|x-3|+|x+2|\leq 0$

Výroky, množiny, zobrazení

6. Dokažte, že platí
   a) $A\Rightarrow A$
   b) $(A\Rightarrow B\bigwedge B\Rightarrow C)\Rightarrow(A\Rightarrow C)$
   c) $A\Leftrightarrow A$
   d) $(A\Leftrightarrow B)\Leftrightarrow(B\Leftrightarrow A)$
   e) $(A\Leftrightarrow B\bigwedge B\Leftrightarrow C)\Rightarrow(A\Leftrightarrow C)$
   f) $\mathrm{non}\,(\mathrm{non}\,A)\Leftrightarrow A$
   g) $(A\Rightarrow B)\Leftrightarrow(\mathrm{non}\,B\Rightarrow\mathrm{non}\,A)$
   h) $(A\Leftrightarrow B)\Leftrightarrow(\mathrm{non}\,B\Leftrightarrow\mathrm{non}\,A)$
   i) $(\mathrm{non}\,(A\bigvee B))\Leftrightarrow((\mathrm{non}\,A)\bigwedge(\mathrm{non}\,B))$
   j) $(\mathrm{non}\,(A\bigwedge B))\Leftrightarrow((\mathrm{non}\,A)\bigvee(\mathrm{non}\,B))$

k) $(\text{non}\,(A \Rightarrow B)) \Leftrightarrow (A \bigwedge (\text{non}\,B))$

l) $(\text{non}\,(A \Leftrightarrow B)) \Leftrightarrow ((A \bigwedge (\text{non}\,B)) \bigvee (B \bigwedge (\text{non}\,A))$

7. Zapište negaci výroku

$$\exists x \in \mathbb{R} : \cos x = \sqrt{1 - \sin^2 x}$$

a rozhodněte, který z výroků je pravdivý.

8. Platí následující výroky?
a) $\forall a \in \mathbb{R}\, \exists \varepsilon > 0\, \exists \alpha \in \mathbb{R}\, \forall x \in (a, a + \varepsilon) : x \in (a, a + \varepsilon) \Leftrightarrow |x - \alpha| < 1$
b) $\exists a \in \mathbb{R}\, \forall \varepsilon > 0\, \forall \alpha \in \mathbb{R}\, \exists x \in (a, a + \varepsilon) : x \in (a, a + \varepsilon) \Leftrightarrow |x - \alpha| < 1$

9. Dokažte:
a) $C \setminus (A \bigcup B) = (C \setminus A) \bigcap (C \setminus B)$
b) $C \setminus (A \bigcap B) = (C \setminus A) \bigcup (C \setminus B)$
c) Nechť A_i, $i = 1, 2, \ldots$ je systém libovolných množin a nechť $B_n = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$. Potom $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$.

10. Dokažte, že je-li f zobrazení, pak

$$f(M_1) \setminus f(M_2) \subset f(M_1 \setminus M_2).$$

(M_1, M_2 jsou podmnožiny definičního oboru f.) Kdy platí rovnost?

11. Nechť $\varphi : [0, \infty) \to [1, \infty)$ je bijekce a nechť $\psi(x) = \sqrt{\varphi(x)^2 - 1}$. Dokažte, že existuje inverzní funkce ψ^{-1} a vyjádřete ji pomocí φ^{-1}. Určete $D_{\psi^{-1}}$.

Opakování II

Matematická indukce

Dokažte matematickou indukcí následující rovnosti a nerovnosti

1. $1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

2. $1^3 + 2^3 + \ldots + n^3 = (1 + 2 + \ldots + n)^2$

3. $\prod_{i=1}^{n}(1 + x_i) \geq 1 + \sum_{i=1}^{n} x_i$, $x_i \geq -2$, x_i mají stejná znaménka

4. $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$ (binomická věta)

5. $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$

6. $\sqrt[n]{x_1 \cdot \ldots \cdot x_n} \leq \frac{1}{n}(x_1 + \ldots x_n)$, $x_i \geq 0$, $i = 1, 2, \ldots, n$ (AG nerovnost)

7. $n! \leq \left(\frac{n+1}{2}\right)^n$

8. $(2n)! < 2^{2n}(n!)^2$

9. $\left|\sin\left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right)\right| \leq \sum_{k=1}^{n} \sin x_k$, $x_k \in [0, \pi]$, $k = 1, 2 \ldots, n$

10. $\frac{1}{2}\frac{3}{4}\frac{5}{6} \cdots \frac{2n-1}{2n} < \frac{1}{\sqrt{2n+1}}$

11. $n^{n+1} > (n+1)^n$, $n \geq 3$

Číselné obory

Supremum, infimum množin

12. U následujících množin nalezněte sup, inf, max a min (pokud existují). Ověřte z definice!
a) $M = (0, 1]$ b) $M = [0, 1]$ c) $M = (0, \infty)$
d) $M = \left\{\frac{m}{n}; m, n \in \mathbb{N}\right\}$ e) $M = \left\{0,5; 0,55; 0,555; \ldots\right\}$
f) $M = \left\{x \in \mathbb{Q}; x^2 < 3\right\}$. Ukažte, že $\sup M \notin \mathbb{Q}$.

13. Nechť A, B jsou neprázdné omezené podmnožiny $\mathbb{R}$. Dokažte:
a) $\inf(-A) = -\sup A$
b) $\sup(A + B) = \sup A + \sup B$
c) $\inf(A - B) = \inf A - \sup B$
d) $\sup(A \cdot B) = \sup A \cdot \sup B$,
kde A, B obsahují pouze nezáporné prvky.
Množiny $-A = \{x; -x \in A\}$, $A + B = \{z; z = x + y, x \in A, y \in B\}$, ostatní jsou definovány analogicky.

14. Nechť A, B jsou neprázdné omezené podmnožiny $\mathbb{R}$. Lze obecně vyjádřit $\sup(A \cup B)$ a $\sup(A \cap B)$ pomocí $\sup A$ a $\sup B$?

15. Nechť M je neprázdná množina a nechť $f : M \to \mathbb{R}$ a $g : M \to \mathbb{R}$ jsou omezené funkce. Dokažte, že
a) $\sup_{x\in M}(f(x) + g(x)) \leq \sup_{x\in M} f(x) + \sup_{x\in M} g(x)$. Musí platit rovnost?
b) $\sup_{x\in M}(f(x) + g(x)) \geq \sup_{x\in M} f(x) + \inf_{x\in M} g(x)$
c) $\sup_{x\in M}(f(x) - g(x)) \leq \sup_{x\in M} f(x) - \inf_{x\in M} g(x)$
Definujeme
$$\sup_{x\in M} f(x) = \sup\{z; z = f(x), x \in M\}.$$

Limity funkcí I

1. Dokažte z definice, že

   a) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{x}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}$ b) $\lim\limits_{x\to 1^+}[x] = 1$ c) $\lim\limits_{x\to 1^-}[x] = 0$

Spočtěte

2. (a) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2-1}{2x^2-x-1}$ (b) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2-1}{2x^2-x-1}$

3. $\lim\limits_{x\to 2}\left(\frac{1}{x^2-2x}-\frac{x}{x^2-4}\right)$

4. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{(1+x)(1+2x)\dots(1+nx)-1}{x}$, $n\in\mathbb{N}$

5. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^{100}-2x+1}{x^{50}-2x+1}$

6. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{(1+mx)^n-(1+nx)^m}{x^2}$, $m,n\in\mathbb{N}$

7. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^{n+1}-(n+1)x+n}{(x-1)^2}$, $n\in\mathbb{N}$

8. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x+x^2+\dots x^n-n}{x-1}$, $n\in\mathbb{N}$

9. $\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{m}{1-x^m}-\frac{n}{1-x^n}\right)$, $m,n\in\mathbb{N}$

10. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{2}{x^2}+1}{\sqrt{\frac{3}{x^4}-\frac{6}{x^2}+5}}$

11. $\lim\limits_{x\to 0+}\frac{\left(\sqrt{\frac{1}{x^2}+1}-\sqrt{\frac{1}{x^2}-1}\right)}{x}$

12. $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\sqrt{\frac{1}{x}+\sqrt{\frac{1}{x}+\sqrt{\frac{1}{x}}}}-\sqrt{\frac{1}{x}-\sqrt{\frac{1}{x}+\sqrt{\frac{1}{x}}}}\right)$

13. (a) $\lim\limits_{x\to 16} \dfrac{\sqrt[4]{x}-2}{\sqrt{x}-4}$ (b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{x+1}-1}{x}$

14. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1-2x-x^2}-(1-x)}{x}$

15. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt[3]{27+x}-\sqrt[3]{27-x}}{x+2\sqrt[3]{x^4}}$

16. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt[m]{1+x}-\sqrt[n]{1+x}}{x}$, $m,n\in\mathbb{N}$

17. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt[3]{1-x}}{\sqrt[3]{1+x}-\sqrt{1-x}}$

18. $\lim\limits_{x\to a^+} \dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{a}+\sqrt{x-a}}{\sqrt{x^2-a^2}}$, $a\in\mathbb{R}_0^+$

19. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt[m]{1+ax}\,\sqrt[n]{1+bx}-1}{x}$, $m,n\in\mathbb{N}$, $a,b\in\mathbb{R}$

Limity funkcí II

Základní limity

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \qquad \lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1 \qquad \lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$$

Pro výpočet limit typu "1^∞":

$$\lim_{x\to a} (f(x))^{g(x)} = e^{\lim_{x\to a} g(x)\ln(f(x))}.$$

Příklady

1. $\displaystyle\lim_{x\to a} \frac{\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} a}{x-a}$, $a \in \mathbb{R}$
2. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1-\cos x^2}}{1-\cos x}$
3. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} x - \sin x}{x^3}$
4. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x \cos 2x \cos 3x}{1-\cos x}$
5. $\displaystyle\lim_{x\to \pi} \frac{\sin nx}{\sin mx}$, $n,\, m \in \mathbb{N}$
6. $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{\sin \pi x}{1-x}$
7. $\displaystyle\lim_{x\to \frac{\pi}{4}} \operatorname{tg}(2x) \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - x\right)$
8. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sin(a+2x) - 2\sin(a+x) + \sin a}{x^2}$, $a \in \mathbb{R}$
9. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{cotg}(a+2x) - 2\operatorname{cotg}(a+x) + \operatorname{cotg} a}{x^2}$, $\sin a \neq 0$
10. $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{\arccos(1-x)}{\sqrt{x}}$
11. $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{\left(\frac{\pi}{2} - \arcsin \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\right)}{x}$

12. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln\cos ax}{\ln\cos bx}$, $a,\ b \in \mathbb{R},\ b \neq 0$

13. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(a+x)+\ln(a-x)-2\ln a}{x^2}$, $a > 0$

14. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(\operatorname{tg}(\frac{\pi}{4}+ax))}{\sin bx}$, $a,\ b \in \mathbb{R},\ b \neq 0$

15. $\lim\limits_{x\to 0^+} \ln(x\ln a)\ln\Big(\dfrac{\ln ax}{\ln\frac{x}{a}}\Big)$, $a > 0$

16. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+xe^x)}{\ln(x+\sqrt{1+x^2})}$

17. $\lim\limits_{x\to 1}(1-x)\log_x 2$

18. $\lim\limits_{x\to 0^+}(1+x)^{\frac{1}{x}}$

19. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}}(\sin x)^{\operatorname{tg} x}$

20. $\lim\limits_{x\to 0}\Big(\dfrac{1+\operatorname{tg} x}{1+\sin x}\Big)^{\frac{1}{\sin^3 x}}$

21. $\lim\limits_{x\to 1}(1+\sin \pi x)^{\operatorname{cotg} \pi x}$

22. $\lim\limits_{x\to 0^+}(\cos\sqrt{x})^{\frac{1}{x}}$

23. $\lim\limits_{x\to 0}(1+x^2)^{\operatorname{cotg} \pi x}$

24. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}}(\operatorname{tg} x)^{\operatorname{tg} 2x}$

25. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sin \pi x^\alpha}{\sin \pi x^\beta}$, $\alpha,\ \beta \in \mathbb{R},\ \beta \neq 0$

26. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{\alpha x}-e^{\beta x}}{\sin \alpha x - \sin \beta x}$, $\alpha,\ \beta \in \mathbb{R},\ \alpha \neq \beta$

27. $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{a^x - x^a}{x-a}$, $a \in \mathbb{R}^+$

28. $\lim\limits_{x\to 0}\Big(\dfrac{1+x2^x}{1+x3^x}\Big)^{\frac{1}{x^2}}$

29. $\lim\limits_{x\to 0}\Big(\dfrac{a^{x^2}+b^{x^2}}{a^x+b^x}\Big)^{\frac{1}{x}}$, $a,\ b \in \mathbb{R}^+$

Spojitost a derivace funkcí

Spojitost funkcí

1. Dodefinujte funkci v bodě 0 tak, aby byla spojitá:

$$f(x) = \frac{1-\cos x}{x^2}, \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

2. Zjistěte, kde jsou nespojité funkce
a) $f(x) = \mathrm{e}^{-\frac{1}{x}}$ b) $f(x) = \operatorname{sgn} \cos \frac{1}{x}$.

3. Vyšetřete spojitost složených funkcí $f(g(x))$ a $g(f(x))$, je-li

$$f(x) = \operatorname{sgn} x \qquad g(x) = x(1-x^2)\,.$$

4. Zjistěte, zda jsou spojité funkce

$$\begin{aligned} \text{a)} f(x) = \ & \frac{\sin x}{|x|} && x \neq 0 \\ & 1 && x = 0 \\ \text{b)} f(x) = \ & x \sin \frac{1}{x} && x \neq 0 \\ & 0 && x = 0 \end{aligned}$$

5. Dokažte, že jsou-li $f(x)$ a $g(x)$ spojité v x_0, pak jsou spojité v x_0 i funkce a) $\min\{f(x), g(x)\}$ b) $\max\{f(x), g(x)\}$.

6. Uveďte příklad funkce nespojité v každém $x \in \mathbb{R}$, jejíž druhá mocnina je spojitá na $\mathbb{R}$.

Derivace funkcí

7. Existuje derivace funkce $f(x) = x|x|$ v bodě 0?

8. Pro jaké α reálné má funkce

$$f(x) = \begin{cases} |x|^\alpha \sin \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

derivaci v bodě 0. Kdy je tato derivace v bodě 0 spojitá?

9. Dokažte, že funkce

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & x \text{ je racionální} \\ 0 & x \text{ je iracionální.} \end{cases}$$

má derivaci pouze v nule.

10. Ukažte, že derivace sudé funkce (pokud existuje) je funkce lichá.

11. Nechť

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & x \leq 1 \\ ax + b & x > 1\,. \end{cases}$$

Určete a, b tak, aby $f(x)$ měla v bodě 1 derivaci.

12. Určete rovnici tečny a normály ke grafu funkce $f(x) = x^3 + 2x^2 - 4x - 3$ v bodě $[-2, ?]$ grafu.

Elementární funkce

Dokažte, že

13. $\operatorname{arctg} x + \operatorname{arccotg} x = \frac{\pi}{2}$, $x \in \mathbb{R}$

14. $\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$, $x \in [-1, 1]$

15. $\operatorname{argsinh} x = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$, $x \in \mathbb{R}$

16. $\operatorname{argcosh} x = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1})$, $|x| \geq 1$

17. $\operatorname{argtgh} x = \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x}$, $x \in (-1, 1)$

18. $\operatorname{argcotgh} x = \frac{1}{2} \ln \frac{x+1}{x-1}$, $|x| > 1$

Derivace elementárních funkcí

19. Dokažte vztahy pro derivace cyklometrických, hyperbolických a hyperbolometrických funkcí.

    Vypočtěte derivace následujících funkcí v libovolném bodě x, kde derivace existuje:

20. $f(x) = \dfrac{2x}{1-x^2}$

21. $f(x) = \sqrt[3]{\dfrac{1+x^3}{1-x^3}}$

22. $f(x) = \dfrac{\sin^2 x}{\sin x^2}$

23. $f(x) = \sin\sin\sin x$

24. $f(x) = 2^{\operatorname{tg}\frac{1}{x}}$

25. $f(x) = x^{a^a} + a^{x^a} + a^{a^x}$

26. $f(x) = (\sin x)^{\cos x} + (\cos x)^{\sin x}$

27. $f(x) = \operatorname{arctg}\dfrac{1+x}{1-x}$

28. $f(x) = x\arcsin^2 x + 2\sqrt{1-x^2}\arcsin x - 2x$

29. $f(x) = \ln(\mathrm{e}^x + \sqrt{1+\mathrm{e}^{2x}})$.

Derivace vyšších řádů. Parciální derivace

30. Ověřte, že funkce $u(x) = \frac{1}{|x|}$, kde $|x|^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$, splňuje v $\mathbb{R}^3 \setminus 0$ Laplaceovu rovnici $\Delta u = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} = 0$.

31. Ověřte, že funkce $v(x) = \frac{1}{t^{\frac{3}{2}}}\mathrm{e}^{-\frac{|x|^2}{4t}}$, kde $|x|^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$, splňuje v $(0,\infty) \times \{\mathbb{R}^3 \setminus 0\}$ rovnici vedení tepla $\frac{\partial v}{\partial t} - \Delta v = 0$, kde $\Delta v = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial^2 v}{\partial x_i^2}$.

32. Spočtěte $f^{(10)}(x)$ je-li $f(x) = \sqrt{x}$.

33. Spočtěte $f^{(50)}(x)$ je-li $f(x) = x^2 \sin 2x$.

Primitivní funkce I

Nalezněte následující primitivní funkce na maximálních možných intervalech. Určete i tyto intervaly.

1. $\displaystyle\int \left(\frac{1-x}{x}\right)^2 \mathrm{d}x$
2. $\displaystyle\int \frac{2^{x+1}-5^{x-1}}{10^x} \mathrm{d}x$
3. $\displaystyle\int \mathrm{tg}^2 x \,\mathrm{d}x$
4. $\displaystyle\int \frac{1}{x^2-x+2} \mathrm{d}x$
5. $\displaystyle\int \max\{1, x^2\} \,\mathrm{d}x$
6. $\displaystyle\int x\mathrm{e}^{-x^2} \,\mathrm{d}x$
7. $\displaystyle\int \frac{1}{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}} \mathrm{d}x$
8. $\displaystyle\int \mathrm{e}^{3x} \cos 2x \,\mathrm{d}x$
9. $\displaystyle\int \frac{\ln^2 x}{x} \mathrm{d}x$
10. $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}(\arcsin x)^2} \mathrm{d}x$
11. $\displaystyle\int \frac{1}{1+\cos x} \mathrm{d}x$
12. $\displaystyle\int \frac{1}{\sin x} \mathrm{d}x$
13. $\displaystyle\int \frac{1}{\sin x \cos^3 x} \mathrm{d}x$

14. $\int \ln x \, \mathrm{d}x$

15. $\int x^3 a^{-x^2} \, \mathrm{d}x$

16. $\int x \operatorname{arctg}(x+1) \, \mathrm{d}x$

17. $\int x^2 \arccos x \, \mathrm{d}x$

18. $\int \frac{x}{\cos^2 x} \, \mathrm{d}x$

19. $\int \sin(\ln x) \, \mathrm{d}x$

20. $\int \sin^7 x \, \mathrm{d}x$

21. $\int \cos^2 x \, \mathrm{d}x$

22. Nalezněte rekurentní vztah pro $\int \cos^n x \, \mathrm{d}x, \quad n \in \mathbb{N}$

Primitivní funkce II

Nalezněte následující primitivní funkce na maximálních možných intervalech. Určete i tyto intervaly.

1. $\displaystyle\int \frac{x^3+1}{x^3-5x^2+6x}\,dx$

2. $\displaystyle\int \frac{1}{(x^3+1)^2}\,dx$

   Vhodnou substitucí převeďte integrály na integrály z racionálních funkcí a ty se pokuste vyřešit.

3. $\displaystyle\int \frac{1}{x(1+2\sqrt{x}+\sqrt[3]{x})}\,dx$

4. $\displaystyle\int x\sqrt{x^2-2x+2}\,dx$

5. $\displaystyle\int \frac{x+\sqrt{1+x+x^2}}{1+x+\sqrt{1+x+x^2}}\,dx$

6. $\displaystyle\int \frac{x-\sqrt{x^2+3x+2}}{x+\sqrt{x^2+3x+2}}\,dx$

   Nalezněte následující primitivní funkce

7. $\displaystyle\int \frac{\sin^2 x}{1+\sin^2 x}\,dx$

8. $\displaystyle\int \frac{1}{2\sin x-\cos x+5}\,dx$

9. $\displaystyle\int \frac{\sin x\cos x}{1+\sin^3 x}\,dx$

10. $\displaystyle\int \frac{\sin^3 x}{\cos^4 x}\,dx$

11. $\displaystyle\int \frac{1}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}\,\mathrm{d}x$

12. $\displaystyle\int \sqrt{a^2+x^2}\,\mathrm{d}x$

Limity funkcí podruhé

Limity funkcí v nevlastních bodech

1. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{a_n x^n + \dots a_1 x + a_0}{A_m x^m + \dots A_1 x + A_0}$, $a_n \neq 0$, $A_m \neq 0$

2. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2x^2+1}{\sqrt{3x^4 - 6x^2 + 5}}$

3. $\lim\limits_{x\to\infty} x(\sqrt{x^2+1} - \sqrt{x^2-1})$

4. $\lim\limits_{x\to\infty} x^{\frac{4}{3}}(\sqrt[3]{x^2+1} - \sqrt[3]{x^2-1})$

Limity funkcí l'Hospitalovým pravidlem

5. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{tg} x - x}{x - \sin x}$

6. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x(\mathrm{e}^x + 1) - 2(\mathrm{e}^x - 1)}{x^3}$

7. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1 - \cos x^2}{x^2 \sin x^2}$

8. $\lim\limits_{x\to 0^+} x^x$

9. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}} (\operatorname{tg} x)^{\operatorname{tg} 2x}$

Symboly O, o, $\sim$, $\cong$

Dokažte platnost následujících tvrzení

10. $\operatorname{arctg} x = O(1)$, $x \to \infty$

11. $x^2 \mathrm{e}^{-x} = o(x^a)$, $x \to \infty$, $a < 0$

12. $\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}} = O(\sqrt[8]{x}),\ x \to 0^+$

13. $\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}} \cong \sqrt{x},\ x \to \infty$

Najděte reálné a, tak aby platilo

14. $\dfrac{1+x}{1+x^4} \sim x^a,\ x \to \infty$

15. $\mathrm{e}^x - \cos x \sim x^a,\ x \to 0.$

Limita posloupnosti

Vypočítejte

1. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt{n^3-2n^2+1}+\sqrt[3]{n^4+1}}{\sqrt[4]{n^6-6n^5+2}+\sqrt[5]{n^7+n^3+1}}$

2. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a^n}{n!}$, $a \in \mathbb{R}$

3. $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n}$

4. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{1\cdot 2}+\dfrac{1}{2\cdot 3}+\ldots+\dfrac{1}{n(n+1)}$

5. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$, kde $a_1=\sqrt{2}$, $a_{n+1}=\sqrt{a_n+2}$, $n\ge 1$

6. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$, $a_1>0$, $a_{n+1}=\dfrac{1}{2}(a_n+\dfrac{1}{a_n})$, $n\ge 1$

7. Zjistěte, pro která $x\in\mathbb{R}$ existuje $\lim\limits_{n\to\infty}\sin nx$.

   Najděte $\limsup\limits_{n\to\infty}$ a $\liminf\limits_{n\to\infty}$

8. $a_n=\dfrac{n-1}{n+1}\cos\dfrac{2}{3}n\pi$

9. $a_n=n(2+(-1)^n)$

10. $a_n=\cos^n\dfrac{2}{3}n\pi$

    Najděte hromadné body následujících posloupností

11. $\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{4},\dfrac{3}{4},\dfrac{1}{8},\dfrac{7}{8},\ldots,\dfrac{1}{2^n},\dfrac{2^n-1}{2^n},\ldots$

12. $\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{3},\dfrac{2}{3},\dfrac{1}{4},\dfrac{2}{4},\dfrac{3}{4},\dfrac{1}{5},\dfrac{2}{5},\dfrac{3}{5},\dfrac{4}{5},\ldots$

Sada příkladů 1/10

Hlubší vlastnosti funkcí

Lokální a globální extrémy funkcí

Nalezněte lokální extrémy funkcí

1. $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 4$, $x \in \mathbb{R}$
2. $f(x) = e^x \sin x$, $x \in \mathbb{R}$
3. $f(x) = x^{\frac{1}{3}}(1-x)^{\frac{2}{3}}$, $x \in \mathbb{R}$

   Dokažte následující nerovnosti
4. $xy \leq \dfrac{x^p}{p} + \dfrac{y^q}{q}$, $x, y > 0$, $1 < p, q < \infty$, $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$ (Youngova nerovnost)
5. $e^x > x + 1$, $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$
6. Dokažte, že funkce

   $$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{pro } x \neq 0 \\ 0 & \text{pro } x = 0 \end{cases}$$

   má v bodě 0 ostré lokální minimum a funkce

   $$g(x) = \begin{cases} xe^{-\frac{1}{x^2}} & \text{pro } x \neq 0 \\ 0 & \text{pro } x = 0 \end{cases}$$

   nemá v bodě 0 lokální extrém, přestože platí $f^{(n)}(0) = g^{(n)}(0) = 0$, $n = 1, 2, \ldots$.
7. Nalezněte globální extrémy funkce $f(x) = x^2 - 4x + 6$ na intervalu $[-3, 10]$.
8. Nalezněte supremum a infimum funkce $f(x) = xe^{-0.01x}$ na intervalu $(0, \infty)$.
9. Nádoba naplněná vodou se svislou stěnou výšky h stojí na vodorovné rovině. Vypočítejte výšku otvoru nádoby nad vodorovnou rovinou tak, aby voda stříkala co nejdále.

10. Mezi dvěma svislými tyčemi, jejichž vzdálenost je d, je upevněna za konce niť délky l. Rozdíl výšek upevnění je h. Po niti může volně klouzat hmotný bod. Najděte rovnovážnou polohu bodu za podmínky, že potenciální energie má být minimální.

Monotónie funkcí

11. Nalezněte intervaly, na kterých je funkce $f(x) = x^n e^{-x}$, $n \in \mathbb{N}$, rostoucí a klesající.

12. Pro atomové teplo prvku platí

$$C_v = 3R\frac{x^2 e^x}{(e^x - 1)^2},$$

kde $x = \frac{T^*}{T}$, T je absolutní teplota v kelvinech, T^* je tzv. charakteristická teplota a R je plynová konstanta. Dokažte, že atomové teplo prvku je rostoucí funkce teploty.

Konvexita, konkávnost

Nalezněte intervaly, kde je funkce konvexní/konkávní, a najděte inflexní body

13. $f(x) = e^{-x^2}$, $x \in \mathbb{R}$

14. $f(x) = x \sin \ln x$, $x \in \mathbb{R}^+$

15. Dokažte nerovnost $\frac{1}{2}(x^n + y^n) > \left(\frac{x+y}{2}\right)^n$, $x, y > 0$, $x \neq y$, $n > 1$ a vysvětlete její geometrický význam.

Taylorův polynom

1. Napište Taylorův polynom funkce $f(x) = e^{2x-x^2}$ stupně 3 v bodě 0.
2. Napište Taylorův polynom funkce $f(x) = \sqrt{x}$ stupně 3 v bodě 1.
3. Spočtěte přibližně $\sqrt[5]{250}$.
4. Spočtěte přibližně $\arcsin 0,45$.
5. Energie volné částice je v teorii relativity dána vztahem $E = mc^2 = \dfrac{m_0 c^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$. Ukažte, že pro $v \ll c$ představuje veličina $T = E - m_0 c^2$ kinetickou energii newtonovské mechaniky.

   Použitím Taylorova rozvoje spočtěte limity

6. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos x - e^{-\frac{x^2}{2}}}{x^4}$
7. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{a^x + a^{-x} - 2}{x^2}$, $a \in \mathbb{R}^+$
8. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x \sin x - x(x+1)}{x^3}$

Průběh funkcí

Vyšetřujte průběh následujících funkcí

1. $f(x) = 3x - x^3$
2. $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x^2 - 5x + 6}$
3. $f(x) = \sqrt{8x^2 - x^4}$
4. $f(x) = \dfrac{\cos x}{\cos 2x}$
5. $f(x) = \mathrm{e}^{-2x} \sin^2 x$
6. $f(x) = \arccos \dfrac{2x}{x^2 + 1}$

Sada příkladů 1/13

Newtonův a Riemannův integrál

Spočtěte

1. $\displaystyle\int_0^{\ln 2} \sqrt{\mathrm{e}^x - 1}\,\mathrm{d}x$

2. $\displaystyle\int_0^1 \arccos x\,\mathrm{d}x$

3. $\displaystyle\int_0^\infty x^{2k-1} e^{-\frac{x^2}{2}}\,\mathrm{d}x, \qquad k \in \mathbb{N}$

4. $\displaystyle\int_0^{4\pi} \frac{1}{1+\sin^2 x}\,\mathrm{d}x$

5. $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{1}{\sin^4 x + \cos^4 x}\,\mathrm{d}x$

6. $\displaystyle\int_2^\infty \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x$

7. $\displaystyle\int_0^\infty \mathrm{e}^{-3x}\,\mathrm{d}x$

8. $\displaystyle\int_0^1 x \ln x\,\mathrm{d}x$

9. $\displaystyle\int_0^\infty \mathrm{e}^{-ax} \cos(bx)\,\mathrm{d}x$

10. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{tg} x\,\mathrm{d}x$

11. Spočtěte použitím definice Riemannova integrálu

$$\int_0^\pi \ln(1 - 2\alpha\cos x + \alpha^2)\,\mathrm{d}x\,,$$

$|\alpha| \neq 1$.

Zjistěte, zda konvergují integrály

12. $\int_0^\infty x^p \, dx, \quad p \in \mathbb{R}$

13. $\int_1^\infty x^p \, dx, \quad p \in \mathbb{R}$

14. $\int_0^{10} x^p \, dx, \quad p \in \mathbb{R}$

15. $\int_0^\infty \frac{x^{\frac{3}{2}}}{1+x^2} \, dx$

16. $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x(1-x^2)}} \, dx$

17. $\int_0^2 \frac{1}{\ln x} \, dx$

18. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\ln \sin x}{x^p} \, dx, \quad p \in \mathbb{R}$

19. $\int_0^\infty \frac{\operatorname{arctg} x}{x^{\frac{3}{2}}} \, dx$