



8. Pro jaké  $\alpha$  reálné má funkce

$$f(x) = \begin{cases} |x|^\alpha \sin \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

derivaci v bodě 0. Kdy je tato derivace v bodě 0 spojitá?

9. Dokažte, že funkce

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & x \text{ je racionální} \\ 0 & x \text{ je iracionální.} \end{cases}$$

má derivaci pouze v nule.

10. Ukažte, že derivace sudé funkce (pokud existuje) je funkce lichá.

11. Nechtě

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & x \leq 1 \\ ax + b & x > 1. \end{cases}$$

Určete  $a$ ,  $b$  tak, aby  $f(x)$  měla v bodě 1 derivaci.

12. Určete rovnici tečny a normály ke grafu funkce  $f(x) = x^3 + 2x^2 - 4x - 3$  v bodě  $[-2, ?]$  grafu.

## Elementární funkce

Dokažte, že

13.  $\arctg x + \operatorname{arccotg} x = \frac{\pi}{2}$ ,  $x \in \mathbb{R}$

14.  $\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$ ,  $x \in [-1, 1]$

15.  $\operatorname{argsinh} x = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$ ,  $x \in \mathbb{R}$

16.  $\operatorname{argcosh} x = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1})$ ,  $|x| \geq 1$

17.  $\operatorname{argtgh} x = \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x}$ ,  $x \in (-1, 1)$

18.  $\operatorname{argcotgh} x = \frac{1}{2} \ln \frac{x+1}{x-1}$ ,  $|x| > 1$

## Derivace elementárních funkcí

19. Dokažte vztahy pro derivace cyklotrických, hyperbolických a hyperbolometrických funkcí.

Vypočtete derivace následujících funkcí v libovolném bodě  $x$ , kde derivace existuje:

20.  $f(x) = \frac{2x}{1-x^2}$

21.  $f(x) = \sqrt[3]{\frac{1+x^3}{1-x^3}}$

22.  $f(x) = \frac{\sin^2 x}{\sin x^2}$

23.  $f(x) = \sin \sin \sin x$

24.  $f(x) = 2^{\operatorname{tg} \frac{1}{x}}$

25.  $f(x) = x^{a^a} + a^{x^a} + a^{a^x}$

26.  $f(x) = (\sin x)^{\cos x} + (\cos x)^{\sin x}$

27.  $f(x) = \operatorname{arctg} \frac{1+x}{1-x}$

28.  $f(x) = x \arcsin^2 x + 2\sqrt{1-x^2} \arcsin x - 2x$

29.  $f(x) = \ln(e^x + \sqrt{1+e^{2x}})$ .

## Derivace vyšších řádů. Parciální derivace

30. Ověřte, že funkce  $u(x) = \frac{1}{|x|}$ , kde  $|x|^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$ , splňuje v  $\mathbb{R}^3 \setminus 0$  Laplaceovu rovnici  $\Delta u = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} = 0$ .

31. Ověřte, že funkce  $v(x) = \frac{1}{t^2} e^{-\frac{|x|^2}{4t}}$ , kde  $|x|^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$ , splňuje v  $(0, \infty) \times \{\mathbb{R}^3 \setminus 0\}$  rovnici vedení tepla  $\frac{\partial v}{\partial t} - \Delta v = 0$ , kde  $\Delta v = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial^2 v}{\partial x_i^2}$ .

32. Spočtete  $f^{(10)}(x)$  je-li  $f(x) = \sqrt{x}$ .

33. Spočtete  $f^{(50)}(x)$  je-li  $f(x) = x^2 \sin 2x$ .