**2. zápočtový test**
**Matematická analýza I, pondělí 3. prosince 2018**

Jméno:

Vyřešte následující příklady. **Všechny kroky zdůvodněte**.

### 1. příklad (8 bodů)

Nechť je dána funkce

$$f(x) = x^2 \sin \frac{1}{x}.$$

a) Určete $D_f$ a spočtěte $f'$ ve všech bodech $D_f$.
b) Funkci $f$ dodefinujte v bodě 0 tak, aby vzniknutá funkce $\tilde{f}$ byla spojitá. Výpočet podrobně zdůvodněte!
c) Pro dodefinovanou funkci nalezněte z definice derivaci $\tilde{f}'(0)$.

### 2. příklad (4 body)

Nalezněte primitivní funkci na maximálních možných intervalech, určete i tyto intervaly:

$$\int \frac{\ln^2 x}{x} \, \mathrm{d}x.$$

### 3. příklad (8 bodů)

Určete interval, na kterém je následující integrál definován. Vhodnou substitucí ho pak převeďte na integrál z racionální funkce a ten vyřešte:

$$\int \frac{2}{2x + \sqrt[3]{x^4}} \, \mathrm{d}x.$$

RIESENIA

**1. priklad**

a) $D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $f'(x) = 2x \sin \frac{1}{x} + x^2 (\cos \frac{1}{x}) \frac{(-1)}{x^2} = 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}$

b) $\tilde{f}(x) = f(x), x \in D_f;\ 0, x = 0.$

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} x^2 \sin \frac{1}{x} = 0,$$

pretoze $x^2$ ma limitu 0 a $|\sin \frac{1}{x}| \leq 1$.

c)

$$\tilde{f}'(0) = \lim_{h\to 0} \frac{\tilde{f}(0+h) - \tilde{f}(0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h^2 \sin \frac{1}{h} - 0}{h} = \lim_{h\to 0} h \sin \frac{1}{h} = 0$$

z rovnakeho dovodu ako v b).

*Bodovanie*:
$D_f$ 1b, $f'$ 1b
dodefinovanie spravna hodnota 1b, postup 2b
definicia 1b, vypocet 1b, vysledok 1b

**2. priklad**

$$\int \frac{\ln^2 x}{x} \,\mathrm{d}x = \begin{vmatrix} \ln x = t \\ \frac{1}{x}\mathrm{d}x = \mathrm{d}t \end{vmatrix} = \int t^2 \,\mathrm{d}t = \frac{t^3}{3} + c = \frac{\ln^3 x}{3} + c,$$

interval $x \in (0, \infty)$.

*Bodovanie*:
integral 3b
interval 1b

**3. priklad**

$$\int \frac{2}{2x + \sqrt[3]{x^4}} \,\mathrm{d}x = \int \frac{2}{x(2 + \sqrt[3]{x})} \,\mathrm{d}x = \begin{vmatrix} \sqrt[3]{x} = t, x = t^3 \\ \mathrm{d}x = 3t^2 \mathrm{d}t \end{vmatrix} = \int \frac{6t^2}{t^3(2+t)} \,\mathrm{d}t = \int \frac{6}{t(2+t)} \,\mathrm{d}t =: (*)$$

$$\frac{6}{t(2+t)} = \frac{A}{t} + \frac{B}{2+t} \implies 2A = 6,\ A + B = 0 \implies A = 3,\ B = -3$$

$$(*) = 3 \int \frac{1}{t} - \frac{1}{2+t} \,\mathrm{d}t = 3 \ln |t| - 3 \ln |2+t| + c = \ln |x| - 3 \ln |2 + \sqrt[3]{x}| + c,$$

intervaly $x \in (-\infty, -8) \cup (-8, 0) \cup (0, \infty)$.

*Bodovanie*:
uprava do tvaru $(*)$ 1b
parcialne zlomky 1b, urcenie $A$ a $B$ 2b
integral 2b
interval 2b