2. zápočtový test
Matematická analýza I, úterý 4. prosince 2018

Jméno:

Vyřešte následující příklady. **Všechny kroky zdůvodněte**.

1. příklad (8 bodů)
Nechť je dána funkce

$$f(x) = \arctan \frac{1}{x^2}.$$

a) Určete D_f a spočtěte f' ve všech bodech D_f.
b) Funkci f dodefinujte v bodě 0 tak, aby vzniknutá funkce $\tilde{f}$ byla spojitá. Výpočet podrobně zdůvodněte!
c) Pro dodefinovanou funkci nalezněte z definice derivaci $\tilde{f}'(0)$.

2. příklad (4 body)
Nalezněte primitivní funkci na maximálních možných intervalech, určete i tyto intervaly:

$$\int \tan \frac{x}{2} \, dx.$$

3. příklad (8 bodů)
Určete interval, na kterém je následující integrál definován. Vhodnou substitucí ho pak převeďte na integrál z racionální funkce a ten vyřešte:

$$\int \frac{1}{x^2 + \sqrt{x}} \, dx.$$

RIESENIA

1. priklad

a) $D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $f'(x) = \frac{1}{1+\frac{1}{x^4}} \frac{(-2x)}{x^3} = \frac{-2x}{x^4+1}$

b) $\tilde{f}(x) = f(x), x \in D_f$; $\frac{\pi}{2}, x = 0$.

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \arctan \frac{1}{x^2} = \lim_{y\to+\infty} \arctan y = \frac{\pi}{2},$$

pretoze limita $x \to 0^+$ a $x \to 0^-$ su rovnake.

c)

$$\tilde{f}'(0) = \lim_{h\to 0} \frac{\tilde{f}(0+h) - \tilde{f}(0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\arctan \frac{1}{h^2} - \frac{\pi}{2}}{h} \overset{l'H}{=} \lim_{h\to 0} \frac{-2h}{h^4+1} = 0,$$

kde sme l'Hospitalovo pravidlo pouzili kvoli tomu ze limita bola tvaru $\frac{0}{0}$.

Bodovanie:
D_f 1b, f' 1b
dodefinovanie spravna hodnota 1b, postup 2b
definicia 1b, vypocet 1b, vysledok 1b

2. priklad

$$\int \tan \frac{x}{2}\, \mathrm{d}x = \begin{vmatrix} \frac{x}{2} = t \\ \mathrm{d}x = 2\mathrm{d}t \end{vmatrix} = 2\int \frac{\sin t}{\cos t}\, \mathrm{d}t = \begin{vmatrix} \cos t = y \\ -\sin t\ \mathrm{d}t = \mathrm{d}y \end{vmatrix} = -2\int \frac{1}{y}\, \mathrm{d}y = -2\ln|\cos \frac{x}{2}| + c,$$

interval $x \in ((2k+1)\pi, (2k+3)\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$.

Bodovanie: integral 3b, interval 1b

3. priklad

$$\int \frac{1}{x^2+\sqrt{x}}\, \mathrm{d}x = \begin{vmatrix} \sqrt{x} = t, x = t^2 \\ \mathrm{d}x = 2t\mathrm{d}t \end{vmatrix} = \int \frac{2t}{t^4+t}\, \mathrm{d}t = 2\int \frac{1}{t^3+1}\, \mathrm{d}t =: (*)$$

$$\frac{1}{t^3+1} = \frac{A}{t+1} + \frac{Bt+C}{t^2-t+1} \implies \begin{matrix} t^2 : A+B=0 \\ t^1 : -A+B+C=0 \\ t^0 : A+C=1 \end{matrix} \implies A = \frac{1}{3},\ B = \frac{-1}{3},\ C = \frac{2}{3}$$

$$(*) = \frac{2}{3}\int \frac{1}{t+1} - \frac{t-2}{t^2-t+1}\, \mathrm{d}t = \frac{1}{3}\left(\int \frac{2}{t+1} - \frac{2t-1}{t^2-t+1} + \frac{3}{t^2-t+1}\right) \mathrm{d}t =: (**)$$

$$\int \frac{3}{t^2-t+1}\, \mathrm{d}t = \int \frac{3}{(t-\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}\, \mathrm{d}t = 4\int \frac{1}{(\frac{2t-1}{\sqrt{3}})^2+1}\, \mathrm{d}t = 2\sqrt{3}\arctan\left(\frac{2\sqrt{x}-1}{\sqrt{3}}\right) + c$$

$$(**) = \frac{1}{3}\left(2\ln|\sqrt{x}+1| - \ln|x-\sqrt{x}+1| + 2\sqrt{3}\arctan\left(\frac{2\sqrt{x}-1}{\sqrt{3}}\right)\right) + c$$

interval $x \in (0, \infty)$.

Bodovanie:
uprava do tvaru $(*)$ 1b
parcialne zlomky, urcenie A, B a C 3b
integral 3b, interval 1b