3. zápočtový test
Matematická analýza I, pondělí 7. ledna 2019

Jméno:

Vyřešte následující příklady. **Všechny kroky zdůvodněte**.

1. příklad (18 bodů)

Vyšetřete průběh funkce

$$f(x) = \frac{\sin(2x+1)}{\sin(2x)}.$$

Podrobně zdůvodněte:
1) Určete definiční obor D_f.
2) Určete, kde je $f(x)$ spojitá.
3) Nalezněte jednostranné limity v bodech nespojitosti nebo v krajních bodech definičního oboru. Pak určete obor hodnot $H(f)$.
4) Určete a zdůvodněte, zda je funkce $f(x)$ a) sudá, b) lichá, c) periodická. Pokud je periodická, určete periodu.
5) Nalezněte průsečníky $f(x)$ s osami.
6) Funkci zderivujte a určete lokální a globální extrémy, množiny a typ monotonie.
7) Funkci zderivujte podruhé a určete inflexní body a množiny, na kterých je funkce konvexní a konkávní.
8) Nalezněte asymptoty.
9) Načrtněte graf funkce $f(x)$.

2. příklad (2 body)

Dokažte:

$$\lim_{x\to 0} \frac{o(x^3)}{x^3} = 0.$$

Využijte definici $o(\cdot)$.

RIESENIA

1. priklad

$f(x) = \frac{\sin(2x+1)}{\sin(2x)}$.

1) $\sin(2x) \neq 0 \Leftrightarrow 2x \neq k\pi \Leftrightarrow x \neq k\frac{\pi}{2},\ k \in \mathbb{Z} \Rightarrow D_f = \mathbb{R} \setminus \{k\frac{\pi}{2},\ k \in \mathbb{Z}\}$.

2) $f(x)$ je spojitá na celom D_f (podiel dvoch spojitych funkcii je spojita funkcia).

3) Limity pre $x = \pm\infty$ neexistuju (napriklad preto, ze definicny obor tam nie je suvisly).

$$\lim_{x \to k\frac{\pi}{2}^+} f(x) = \lim_{x \to k\frac{\pi}{2}^+} \frac{\sin(2x+1)}{\sin(2x)} = \left\{ \begin{array}{ll} '\frac{omezena>0}{0^+}', & x \to (k\pi)^+ \\ '\frac{omezena<0}{0^-}', & x \to (\frac{\pi}{2}+k\pi)^+ \end{array} \right\} = +\infty,\ k \in \mathbb{Z}$$

$$\lim_{x \to k\frac{\pi}{2}^-} f(x) = \lim_{x \to k\frac{\pi}{2}^-} \frac{\sin(2x+1)}{\sin(2x)} = \left\{ \begin{array}{ll} '\frac{omezena>0}{0^-}', & x \to (k\pi)^- \\ '\frac{omezena<0}{0^+}', & x \to (\frac{\pi}{2}+k\pi)^- \end{array} \right\} = -\infty,\ k \in \mathbb{Z}$$

Na kazdom spojitom intervale $(k\frac{\pi}{2}, (k+1)\frac{\pi}{2})$ funkcia dosiahne vsetky hodnoty, preto $H(f) = \mathbb{R}$.

4) a) sudá? $f(-x) = f(x)$? Nie (vyuzijeme ze sin je licha, $\sin(-x) = -\sin(x)$):

$$f(-x) = \frac{\sin(-2x+1)}{\sin(-2x)} = \frac{-\sin(2x-1)}{-\sin(2x)} = \frac{\sin(2x-1)}{\sin(2x)} \neq \frac{\sin(2x+1)}{\sin(2x)} = f(x)$$

b) lichá? $f(-x) = -f(x)$? Nie:

$$f(-x) = \frac{\sin(2x-1)}{\sin(2x)} \neq -\frac{\sin(2x+1)}{\sin(2x)} = -f(x)$$

c) periodická? Ano, $\sin(2x+1) = \sin(2x)\cos 1 + \sin 1 \cos(2x)$ je sucet dvoch funkcii s periodou 2π a arumentom $2x$ (tvaru konstanta.$\sin(2x)$, resp. konstanta.$\cos(2x)$), $\sin(2x+1)$ ma teda periodu π (porovnavame s x). Rovnako, $\sin(2x)$ ma tiez periodu 2π vzhladom k argumentu $2x$, teda π vzhladom k x. Mame teda podiel dvoch funkcii a kazda ma periodu π, takze po intervale dlzky π sa opakuju hodnoty v citateli aj menovateli, funkcia ma preto periodu π.

5) Priesecniky s osou x:

$$f(x) = \frac{\sin(2x+1)}{\sin(2x)} = 0 \Leftrightarrow \sin(2x+1) = 0 \Leftrightarrow 2x+1 = k\pi \Leftrightarrow x = k\frac{\pi}{2} - \frac{1}{2},\ k \in \mathbb{Z}$$

Priesecnik s osou y: $f(0)$ nie je definovana lebo $x = 0$ nie je v D_f.

6)

$$f'(x) = \frac{2\cos(2x+1)\sin(2x) - 2\cos(2x)\sin(2x+1)}{\sin^2(2x)} = \frac{2}{\sin^2(2x)}\sin(2x-2x-1) = \frac{2\sin(-1)}{\sin^2(2x)},$$

$f'(x) \neq 0$ pre vsetky x z D_f, takze funkcia nema lokalny extrem, a ani globalne lebo $H(f) = \mathbb{R}$. Tiez $f'(x) < 0$ na celom D_f, takze funkcia je vsade klesajuca.

7)

$$f''(x) = 2\sin(-1)(-2)\sin^{-3}(2x)2\cos(2x) = \frac{8\sin 1}{\sin^2(2x)}\mathrm{cotan}(2x),$$

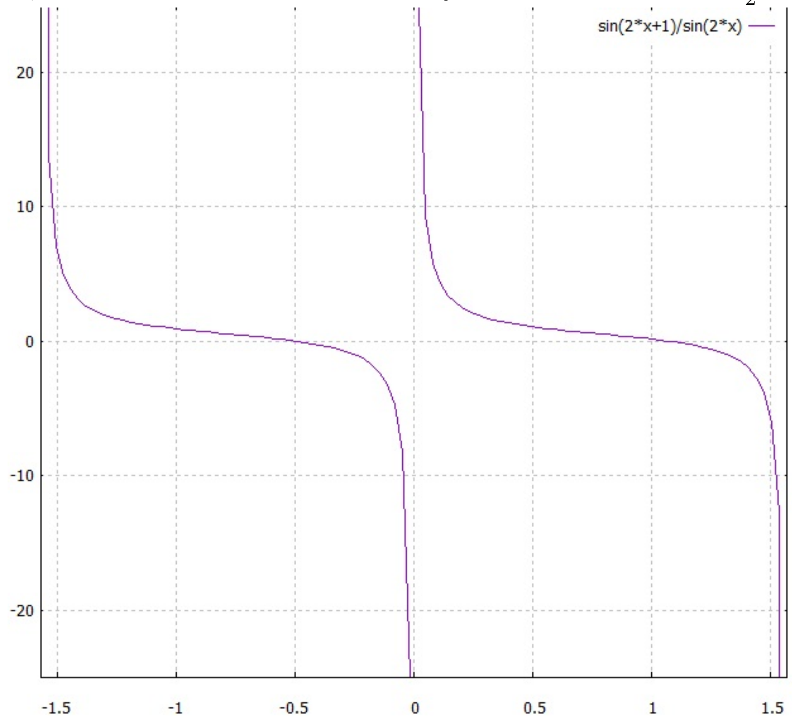
takze znamienko druhej derivacie je rovnake ako znamienko funkcie $\mathrm{cotan}(2x)$.

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow \mathrm{cotan}(2x) = 0 \Leftrightarrow 2x = \frac{\pi}{2} + k\pi,\ \text{takze } IB = \left\{\frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2},\ k \in \mathbb{Z}\right\}$$

$$f''(x) > 0 \Leftrightarrow \mathrm{cotan}(2x) > 0 \Leftrightarrow x \in \left(k\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}\right),\ k \in \mathbb{Z},\ \text{tu je konvexna}$$

$$f''(x) < 0 \Leftrightarrow \mathrm{cotan}(2x) < 0 \Leftrightarrow x \in \left(\frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}, (k+1)\frac{\pi}{2}\right),\ k \in \mathbb{Z},\ \text{tu je konkavna}$$

8) Vsetky limity v 3) nam vysli $\pm\infty$ (podla definicie staci ked je limita aspon z jednej strany rovna $\pm\infty$), preto ma $f(x)$ vertikalne asymptoty pre $x = k\frac{\pi}{2},\ k \in \mathbb{Z}$. V $x = \pm\infty$ nema ani limity, preto ani asymptoty.
9) Z vypoctov vyssie a nasledne aj z obrazku vidime, ze funkcia ma periodu $\frac{\pi}{2}$, nielen π. Vsimnite si, ze funkcia sa meni z konvexnej na konkavnu v $x = k\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}$, ale xovu os pretina v bode $x = k\frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}$!



Bodovanie:
1) D_f 1b, 2) obor spojitosti 0,5b, 3) limity v krajnych bodoch 1b, v bodoch nespojitosti 1b, obor hodnot 1b, 4) suda 0,5b, licha 0,5 b, periodicka 1b, 5) s x 1b, s y 0,5b, 6) $f'(x)$ 1b, lokalny extrem 0,5b, globalne 0,5 b, mnoziny monotonie 1b, 7) $f''(x)$ 1b, inflexne 1b, mnoziny konvex vs konkav 3b, 8) asymptoty 0,5 b, 9) graf 1,5b.

2. priklad
Definicia $o(\cdot)$: $f(x) = o(g(x))$ pre $x \to x_0 \Leftrightarrow \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$.
Dosadime: $g(x) = x^3$, teda $f(x) = o(x^3)$ a $x_0 = 0$: $\lim_{x \to 0} \frac{o(x^3)}{x^3} = 0$.

Bodovanie: definicia 1b, dosadenie 1b