3. zápočtový test

Matematická analýza I, úterý 8. ledna 2019

Jméno:

Vyřešte následující příklady. **Všechny kroky zdůvodněte**.

1. příklad (18 bodů)

Vyšetřete průběh funkce

$$f(x) = \ln |x^2 - 3x + 2|.$$

Podrobně zdůvodněte:

1) Určete definiční obor D_f.

2) Určete, kde je $f(x)$ spojitá.

3) Nalezněte jednostranné limity v bodech nespojitosti nebo v krajních bodech definičního oboru. Pak určete obor hodnot $H(f)$.

4) Určete a zdůvodněte, zda je funkce $f(x)$ a) sudá, b) lichá, c) periodická. Pokud je periodická, určete periodu.

5) Nalezněte průsečníky $f(x)$ s osami.

6) Funkci zderivujte a určete lokální a globální extrémy, množiny a typ monotonie.

7) Funkci zderivujte podruhé a určete inflexní body a množiny, na kterých je funkce konvexní a konkávní.

8) Nalezněte asymptoty.

9) Načrtněte graf funkce $f(x)$.

2. příklad (2 body)

Dokažte:

$$\lim_{x \to 0} \frac{o(x^3)}{x^3} = 0.$$

Využijte definici $o(\cdot)$.

RIESENIA

1. priklad

$f(x) = \ln|x^2 - 3x + 2|$.

1) $x^2 - 3x + 2 = (x-1)(x-2) \neq 0 \Rightarrow D_f = \mathbb{R} \setminus \{1,2\}$.

2) $f(x)$ je spojitá na celom D_f (zlozenie dvoch spojitych funkcii je spojita funkcia).

3)

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty} \ln|x^2-3x+2| =' \ln\infty' = +\infty$$
$$\lim_{x\to 1^\pm} f(x) = \lim_{x\to 1^\pm} \ln|(x-1)(x-2)| =' \ln 0' = -\infty$$
$$\lim_{x\to 2^\pm} f(x) = \lim_{x\to 2^\pm} \ln|(x-1)(x-2)| =' \ln 0' = -\infty$$

Preto $H(f) = \mathbb{R}$.

4) a) sudá? $f(-x) = f(x)$? Nie:

$$f(-x) = \ln|(-x)^2 + 3x + 2| = \ln|x^2+3x+2| \neq \ln|x^2-3x+2| = f(x)$$

b) lichá? $f(-x) = -f(x)$? Nie:

$$f(-x) = \ln|(-x)^2 + 3x + 2| = \ln|x^2+3x+2| \neq -\ln|x^2-3x+2| = -f(x)$$

c) periodická? Nie, logaritmus nie je periodicka funkcia.

5) Priesecniky s osou x:

$$f(x) = \ln|x^2-3x+2| = 0 \Leftrightarrow x^2-3x+2 = \pm 1 \Leftrightarrow x^2-3x+1 = 0 \vee x^2-3x+3 = 0$$

prvy diskriminant: $(-3)^2 - 4.1.1 = 5$, druhy diskriminant: $(-3)^2 - 4.1.3 = -3$, teda priesecniky dostaneme len z prveho: $x_{1,2} = \frac{3\pm\sqrt{5}}{2}$.

Priesecnik s osou y: $f(0) = \ln|2|$.

6)

$$f'(x) = \frac{1}{|x^2-3x+2|} \cdot \frac{x^2-3x+2}{|x^2-3x+2|} \cdot (2x-3) = \frac{2x-3}{x^2-3x+2}$$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 2x-3 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{3}{2}$ lokalny extrem, globalne nema lebo $H(f) = \mathbb{R}$.

$x \in (-\infty, 1)$: $f'(x) < 0$; $x \in (1, \frac{3}{2})$: $f'(x) > 0$; $x \in (\frac{3}{2}, 2)$: $f'(x) < 0$; $x \in (2,\infty)$: $f'(x) > 0$.

Teda $f(x)$ je rastuca na $(1, \frac{3}{2}) \cup (2,\infty)$ a klesajuca na $(-\infty,1) \cup (\frac{3}{2}, 2)$. Preto je v $x = \frac{3}{2}$ lokalne maximum.

7)

$$f''(x) = \frac{2(x^2-3x+2) - (2x-3)(2x-3)}{(x^2-3x+2)^2} = \frac{2x^2-6x+4-4x^2+12x-9}{(x^2-3x+2)^2} = \frac{-2x^2+6x-5}{(x^2-3x+2)^2} < 0,$$

pretoze diskriminant $36 - 4.(-2).(-5) = -4$, teda $-2x^2+6x-5$ nulu nepretina a je vsade zaporna. Funkcia je teda konkavna na $(-\infty,1) \cup (1,2) \cup (2,\infty)$. Inflexne body preto nema.

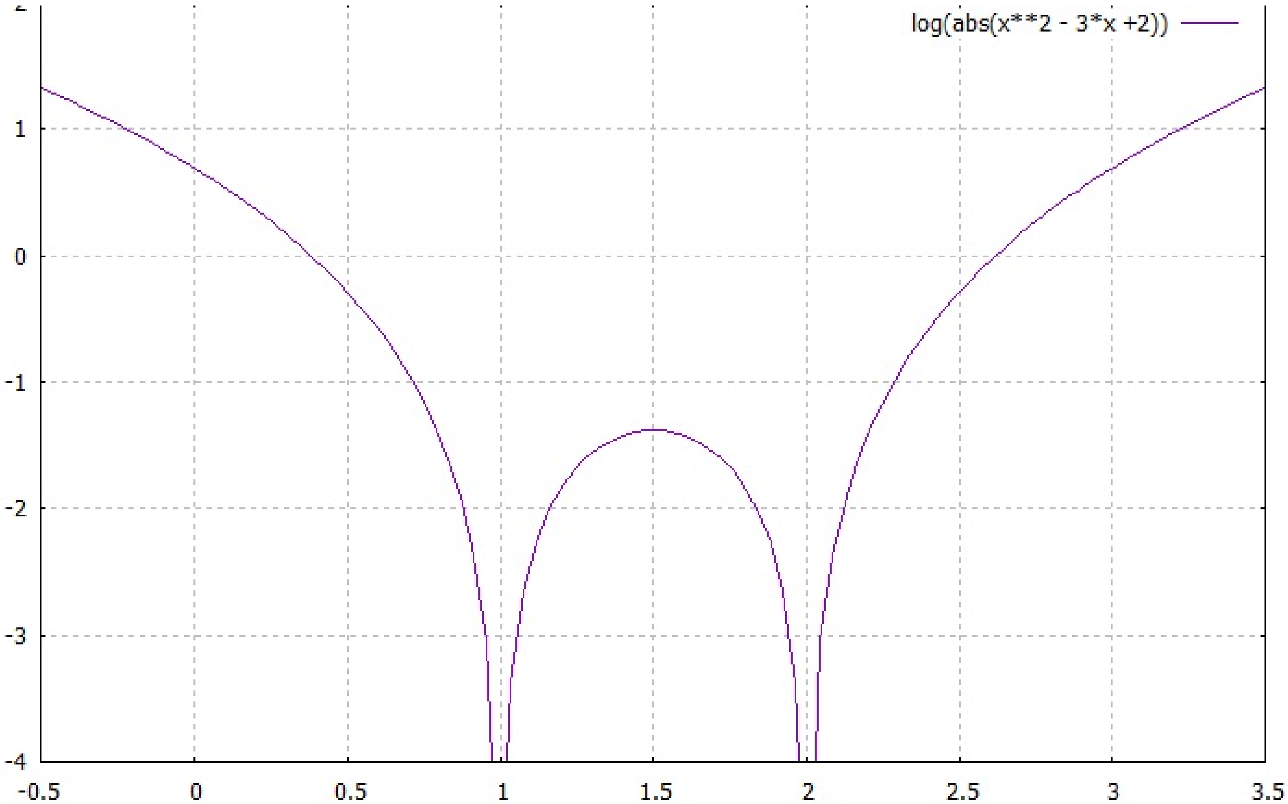
8) Podla 3) su limity v bodoch nespojitosti rovne $(-\infty)$ (podla definicie staci ked je limita aspon z jednej strany rovna $\pm\infty$), preto ma $f(x)$ vertikalne asymptoty pre $x \in \{1,2\}$. V $x = \pm\infty$ pocitame

$$k = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{\ln|x^2-3x+2|}{x} \overset{l'H}{=} \lim_{x\to\pm\infty} \frac{\frac{2x-3}{x^2-3x+2}}{1} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x(2-\frac{3}{x})}{x^2(1-\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2})} = 0$$

a

$$q = \lim_{x\to\pm\infty} (f(x) - k.x) = \lim_{x\to\pm\infty} (f(x) - 0.x) = \lim_{x\to\pm\infty} \ln|x^2 - 3x + 2| = +\infty,$$

preto v $x = \pm\infty$ nema asymptoty.

9) 

.

Bodovanie:
1) D_f 1b, 2) obor spojitosti 0,5b, 3) limity v krajnych bodoch 1b, v bodoch nespojitosti 1b, obor hodnot 1b, 4) kazde 0,5b, 5) s x 1,5b, s y 1b, 6) $f'(x)$ 1b, lokalny extrem 1b, globalne 0,5 b, mnoziny monotonie kazda 1b, 7) $f''(x)$ 1b, inflexne 0,5b, mnoziny konvex vs konkav 2b, 8) asymptoty 0,5 b, 9) graf 1b.

2. priklad
Definicia $o(\cdot)$: $f(x) = o(g(x))$ pre $x \to x_0 \Leftrightarrow \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$.
Dosadime: $g(x) = x^3$, teda $f(x) = o(x^3)$ a $x_0 = 0$: $\lim_{x\to 0} \frac{o(x^3)}{x^3} = 0$.

Bodovanie: definicia 1b, dosadenie 1b