

Matematická analýza I

ZS 2020/21

1. zápočtový test

2.11.2020

1. (5 bodů) Spočtěte

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x - 2 \sin x}{\sqrt{x^4 + x^3 + 1} - \sqrt{x^4 + 3x^3 + 1}}.$$

2. (5 bodů) Dokažte, že neexistuje

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 - \cos x}}{\ln(1 + x) - \ln(1 - x)}$$

Řešení

1:

$$\begin{aligned} & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x - 2 \sin x}{\sqrt{x^4 + x^3 + 1} - \sqrt{x^4 + 3x^3 + 1}} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin x \cos x - 2 \sin x}{\sqrt{x^4 + x^3 + 1} - \sqrt{x^4 + 3x^3 + 1}} \cdot \frac{\sqrt{x^4 + x^3 + 1} + \sqrt{x^4 + 3x^3 + 1}}{\sqrt{x^4 + x^3 + 1} + \sqrt{x^4 + 3x^3 + 1}} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} 2 \frac{\sin x \cos x - 1}{x} \frac{x^3}{x^2} (\sqrt{x^4 + x^3 + 1} + \sqrt{x^4 + 3x^3 + 1}) \\ &\stackrel{\text{a)}}{=} 2 \cdot \left(\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \right) \cdot \left(\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{x^2} \right) \cdot \left(\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3}{-2x^3} \right) \cdot \left(\lim_{x \rightarrow 0} (\sqrt{x^4 + x^3 + 1} + \sqrt{x^4 + 3x^3 + 1}) \right) \\ &= 2 \cdot 1 \cdot \left(-\frac{1}{2} \right) \cdot \left(-\frac{1}{2} \right) \cdot (\sqrt{1} + \sqrt{1}) = 1. \end{aligned}$$

kde jsme u a) použili větu o limitě součinu.

2: Ukážeme, že jednostranné limity sice existují, ale jsou různé a tedy limita neexistuje

$$\begin{aligned} & \lim_{x \rightarrow 0_{\pm}} \frac{\sqrt{1 - \cos x}}{\ln(1+x) - \ln(1-x)} = \lim_{x \rightarrow 0_{\pm}} \sqrt{\frac{1 - \cos x}{x^2}} \frac{\sqrt{x^2}}{\ln \frac{1+x}{1-x}} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0_{\pm}} \sqrt{\frac{1 - \cos x}{x^2}} \frac{\frac{2x}{1-x}}{\ln(1 + \frac{2x}{1-x})} \frac{\sqrt{x^2}}{2x} (1-x) \\ &\stackrel{\text{b)}}{=} \sqrt{\lim_{x \rightarrow 0_{\pm}} \frac{1 - \cos x}{x^2}} \cdot \left(\lim_{x \rightarrow 0_{\pm}} \frac{\frac{2x}{1-x}}{\ln(1 + \frac{2x}{1-x})} \right) \cdot \left(\lim_{x \rightarrow 0_{\pm}} \frac{\sqrt{x^2}}{2x} \right) \cdot \lim_{x \rightarrow 0_{\pm}} (1-x) \\ &= \sqrt{\frac{1}{2}} \cdot 1 \cdot \left(\pm \frac{1}{2} \right) \cdot 1 = \pm \frac{\sqrt{2}}{4}. \end{aligned}$$

kde jsme u b) použili větu o limitě součinu a o limitě složené funkce.