

## NÁHODNÉ VEKTORY

30.10.2019

1. Pravděpodobnost narození dcery je stejná jako pravděpodobnost narození syna. Náhodná veličina  $X$  udává počet dcer v náhodně vybrané rodině se třemi dětmi, veličina  $Y$  udává počet starších bratrů nejmladšího dítěte v téže rodině.

- (a) Odvod'te rozdělení náhodného vektoru  $(X, Y)^\top$ .
- (b) Jaké jsou marginální rozdělení  $X$  a  $Y$ ?
- (c) Jsou veličiny  $X$  a  $Y$  nezávislé?

2. Nechť  $Z$  je počet mladších sester nejstaršího dítěte v rodině z příkladu 1. Napište sdružené a marginální rozdělení  $(X, Z)^\top$  a porovnejte s rozdělením  $(X, Y)^\top$ .

3. Navrhněte na pravděpodobnostním prostoru z příkladů 1 a 2 dvojici náhodných veličin  $(U, V)^\top$ , které jsou nezávislé.

4. V šuplíku je 6 ponožek: 2 bílé, 2 černé a 2 oranžové. Potmě náhodně vytáhneme z šuplíku 3 ponožky. Označme jako  $X$  počet vytažených bílých ponožek a  $Y$  je počet vytažených oranžových ponožek.

- (a) Napište tabulku rozdělení náhodného vektoru  $(X, Y)^\top$ . Určete, s jakou pravděpodobností jsou mezi třemi vytaženými ponožkami alespoň dvě stejné.
- (b) Jsou  $X$  a  $Y$  nezávislé?

5. Chystáte oslavu narozenin ve své oblíbené restauraci a zvete všechny své příbuzné (budete za ně platit). Množství peněz, které všichni Vaši hosté dohromady projí a propijí (v tisíci Kč), jsou náhodné veličiny  $X$  a  $Y$ . Ze zkušenosti víte, že vektor  $(X, Y)^\top$  má spojitě rozdělení charakterizované sdruženou hustotou

$$f(x, y) = \begin{cases} c(x + y) & \text{pro } 0 < x < 1, 0 < y < 1, \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$

- (a) Určete konstantu  $c > 0$ .
- (b) Jaké je rozdělení částky, kterou zaplatíte jen za nápoje? Jaké je rozdělení obnosu, který padne jen na jídlo? Jsou tyto dvě veličiny nezávislé?
- (c) Jaká je pravděpodobnost, že za pití zaplatíte více než za jídlo?

6. Náhodná veličina  $X$  udává dobu, kterou strávíte čekáním na tramvaj na Malostranském náměstí (v minutách) a náhodná veličina  $Y$  udává dobu, kterou následně strávíte čekáním na metro A ve stanici Malostranská (také v minutách). Ze zkušenosti víme, že náhodný vektor  $(X, Y)^\top$  má spojitě rozdělení s hustotou

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{2}e^{-x-y/2} & \text{pro } x > 0, y > 0, \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$

- (a) Jaké je rozdělení jednotlivých dob čekání (na tramvaj a na metro zvlášť)?
- (b) Jsou doby strávené čekáním na tramvaj a na metro nezávislé?
- (c) S jakou pravděpodobností je doba čekání na tramvaj delší než doba čekání na metro?

## OPAKOVÁNÍ

SDRUŽENÉ ROZDĚLENÍ náhodného vektoru  $(X, Y)^\top$ :

- Jestliže  $(X, Y)^\top$  nabývá pouze nejvýše spočetně mnoha různých hodnot  $(x_i, y_j)^\top$ , pak má  $(X, Y)^\top$  diskrétní rozdělení a to je popsáno pomocí  $P(X = x_i, Y = y_j)$ .
- Jestliže má  $(X, Y)^\top$  spojité rozdělení, je toto rozdělení popsáno hustotou  $f(x, y)$  a platí

$$P\left(\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \in B\right) = \iint_B f(x, y) dx dy, \quad B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2).$$

MARGINÁLNÍ ROZDĚLENÍ:

- Jestliže má  $(X, Y)^\top$  diskrétní rozdělení a nabývá pouze hodnot  $(x_i, y_j)^\top$ , pak marginální rozdělení veličiny  $X$  je diskrétní a spočteme jej jako

$$P(X = x_i) = \sum_j P(X = x_i, Y = y_j).$$

- Jestliže má  $(X, Y)^\top$  spojité rozdělení s hustotou  $f(x, y)$ , pak marginální hustotu veličiny  $X$  spočteme jako

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dy.$$

Podobně pro marginální hustotu  $f_Y$  veličiny  $Y$ .

NEZÁVISLOST:

- Jestliže má  $(X, Y)^\top$  diskrétní rozdělení a nabývá pouze hodnot  $(x_i, y_j)^\top$ , pak jsou veličiny  $X, Y$  nezávislé právě tehdy, když

$$P(X = x_i, Y = y_j) = P(X = x_i)P(Y = y_j) \quad \text{pro všechna } x_i, y_j.$$

- Jestliže má  $(X, Y)^\top$  spojité rozdělení s hustotou  $f$ ,  $X$  má marginální hustotu  $f_X$  a  $Y$  má hustotu  $f_Y$ , pak jsou veličiny  $X, Y$  nezávislé právě tehdy, když

$$f(x, y) = f_X(x)f_Y(y) \quad \text{pro s.v. } (x, y)^\top \in \mathbb{R}^2.$$