Výsledky příkladů ze cvičení

Poslední změna 20. března 2020

Cvičení 1: Klasická pravděpodobnost

1. kostky
   (a) $1/2$
   (b) $1/4$
   (c) $1/2$
   (d) $15/6^4$
   (e) $\frac{2\binom{5+6}{5}-6}{6^6}$
   (f) $\frac{5^6-4^6}{6^6}$
2. karty s vracením
   (a) $\frac{31\cdot 30\cdot 29}{32^3}$
   (b) $\frac{147}{2048}$
   (c) $\frac{323}{4096}$

   karty bez vracení
   (a) 1
   (b) $\frac{\binom{4}{2}\binom{28}{2}}{\binom{32}{4}}$
   (c) $\frac{2381}{35\,960}$
3. sekretářka:
   (a) $1 - 1/2 + 1/3! - \cdots + (-1)^n 1/n! = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}1/k! = 1 - \sum_{k=0}^{n}(-1)^k/k!$
   (b) $1 - \sum_{k=0}^{n}(-1)^k/k! \to 1 - \mathrm{e}^{-1} = 1 - 1/\mathrm{e}$ pro $n \to \infty$
4. Maxwell-Boltzmann
   (a) $\mathsf{P}(A_k) = \binom{r}{k}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{r-k}\cdot\left(\frac{1}{n}\right)^k$ pro $k = 0, 1, \ldots, r$ a $\mathsf{P}(A_k) = 0$ pro $k > r$
   (b) $\mathsf{P}(C) = \sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k\binom{n}{k}\left(\frac{n-k}{n}\right)^r$ pro $r \geq n$ a $\mathsf{P}(C) = 0$ pro $r < n$
   (c) $\lambda^k \mathrm{e}^{-\lambda}/k!$ pro $k = 0, 1, 2, \ldots$
5. narozeniny: $\mathsf{P}(A_n) = 1 - \prod_{i=0}^{n-1}\left(1 - \frac{i}{365}\right)$; $n \geq 41$

Cvičení 2: Nezávislost, podmíněná pravděpodobnost, úplná pravděpodobnost, Bayesův vzorec

1. pouze pokud $\mathsf{P}(A) = 0$ nebo $\mathsf{P}(B) = 0$
2. 2 kostky: a) 2/5, b) jsou závislé, c) 6/11
3. 2 kostky: Jsou po dvou nezávislé. Nejsou nezávislé, protože $\mathsf{P}(A \cap B \cap C) \neq \mathsf{P}(A)\mathsf{P}(B)\mathsf{P}(C)$
4. dlouhé vlasy: a)0.31 b) $24/31 = 0.7741935$

5. Mince
   (a) $\mathsf{P}(\text{odměna}) = 2/5$, a proto je pravděpodobnější, že odměnu nedostaneme
   (b) $\mathsf{P}(n \text{ mincí}|\text{není odměna}) = \frac{5}{3}\frac{2(2^n-1)}{6^n}$ pro $n = 1, 2, \ldots,$

   $\mathsf{P}(n \text{ mincí}|\text{ odměna}) = 5\left(\frac{1}{6}\right)^n$ pro $n = 1, 2, \ldots$

6. K → F → C
   (a) Cyril 25/91 (Karel 36/91, Franta 30/91)
   (b) $\frac{91}{216}\left(\frac{5}{6}\right)^{3k-2}$ pro $k = 1, 2, \ldots$ a 1/6 pro $k = 0$

7. (a) $b/(a+b)$, (b) $b/(a+b)$

8. lovci: $3/29, 8/29, 18/29$

9. tři truhly: 2/3

Cvičení 3: Náhodná veličina — Diskrétní rozdělení

1. mince:
   (a) X nabývá hodnot $0, 1, 2$ s pravděpodobnostmi $\mathsf{P}(X = 0) = 1/4$, $\mathsf{P}(X = 1) = 2/3$ a $\mathsf{P}(X = 2) = 1/12$
   (b) $P_X(B) = 1/4 \cdot \delta_0(B) + 2/3 \cdot \delta_1(B) + 1/12 \cdot \delta_2(B)$; F je po částech konstantní, má skoky v bodech 0,1 a 2 o velikostech $1/4, 2/3$ a $1/12$.
   (c) $\mathsf{E}X = 5/6$, $\mathsf{var}\, X = 11/36$
   (d) $Y = 100X$, $\mathsf{E}Y = 100 \cdot 5/6$, $\mathsf{var}\, Y = 100^2 \cdot 11/36$

2. X je náhodná veličina, Y není

3. (a) alternativní rozdělení s parametrem p, $\mathsf{P}_X = p\delta_1 + (1-p)\delta_0$,
   (b) $\mathsf{E}X = p$, $\mathsf{var}\, X = p(1-p)$

4. test:
   (a) $\mathsf{P}(X = k) = \binom{n}{k}(1/4)^k(3/4)^{n-k}$ pro $k = 0, \ldots, n$,
   binomické rozdělení s parametry n a $1/4$, tj. $\mathsf{Bi}(n, 1/4)$
   (b) $\mathsf{E}X = n/4$,
   (c) $\mathsf{var}\, X = 3n/16$
   (d) $a = 3$
   (e) $\mathsf{E}X = n/k$, $\mathsf{var}\, X = n(k-1)/k^2$, rozptyl je maximální pro $k = 2$

5. stanice:
   (a) $\mathsf{E}X = \lambda$
   (b) $\mathsf{var}\, X = \lambda$

6. loterie: geometrické rozdělení $\mathsf{P}(X = k) = (1-p)^k p$ pro $k = 0, 1, 2, \ldots$, $\mathsf{E}X = (1-p)/p$

Cvičení 4: Náhodná veličina — Spojité rozdělení

1.(a) $P_X(B) = \int_{B\cap(-1,1)} 1/2dx = \frac{1}{2}\lambda(B\cap(-1,1))$,

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & x \le -1, \\ \frac{x+1}{2} & x \in (-1,1) \\ 1 & x \ge 1 \end{cases}$$

(b) $\mathsf{P}(X=0)=0$, $\mathsf{P}(X\in[-1/2,1/3)) = 5/12$

(c) $\mathsf{E}X = 0$, $\mathsf{var}\,X = 1/3$,

(d) medián $F^{-1}(1/2) = 0$

(e) distribuční funkce

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0, & y < 0, \\ \sqrt{y}, & 0 \le y \le 1, \\ 1, & y > 1, \end{cases}$$

hustota $f_Y(y) = 1/[2\sqrt{y}]$ pro $y \in (0,1)$ a $f_Y(y) = 0$ jinak

(f) $\mathsf{E}Y = 1/3$, $\mathsf{var}\,Y = 4/45$

(g) $\mathsf{E}Z = \pi/2$

2.(a) $c = 1/5$, jde o exponenciální rozdělení s parametrem $\lambda = 1/5$

(b) $F(x) = 1 - \mathrm{e}^{-x/5}$ pro $x \ge 0$ a $F(x) = 0$ pro $x < 0$,

(c) $\mathsf{E}X = 5$

(d) $\mathsf{var}\,X = 25$

(e) plyne po rozepsání pomocí distribuční funkce

(f) $F^{-1}(u) = -5\log(1-u)$, medián $F^{-1}(1/2) = 5\log 2$

(g) $Y = 5 + 3X$, $\mathsf{E}Y = 20$, $\mathsf{var}\,Y = 9\cdot 25$, rozdělení:

$$f_Y(y) = \begin{cases} 0 & y < 0, \\ \frac{1}{15}\mathrm{e}^{-(y-5)/15}, & y \ge 0. \end{cases}$$

3.(a) nutně $a > 1$, potom $c = a - 1$,
$\mathsf{E}X = (a-1)/(a-2)$ pro $a > 2$ a $\mathsf{E}X = \infty$ (tj. neexistuje) pro $a \in (1,2]$

(b) $a \in \mathbb{R}$ libovolné, $c = 1/\pi$, $\mathsf{E}X$ neexistuje (integrál je neurčitý výraz)

4. $\mathsf{E}X = 0$, $\mathsf{var}\,X = 1$, $\mathsf{E}\mathrm{e}^{X^2/4} = \sqrt{2}$

5. distribuční funkce:

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0, & y < -1, \\ 1/2 + \arcsin(y)/\pi, & -1 \le y \le 1, \\ 1, & y > 1, \end{cases}$$

a hustota $f_Y(y) = 1/(\pi\sqrt{1-y^2})$ pro $y \in (-1,1)$ a $f_Y(y) = 0$ jinak. $\mathsf{E}Y = 0$