

## MOMENTOVÝ ODHAD A VLASTNOSTI ODHADU

4.12.2018

1. Lze předpokládat, že počet gólů vstřelených v jednom fotbalovém zápase v jedné konkrétní soutěži se řídí Poissonovým rozdělením, tj.

$$P(X = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}, \quad k = 0, 1, 2, \dots,$$

kde  $\lambda > 0$  je neznámý parametr. Dále lze uvažovat, že počty gólů vstřelené v různých zápasech jsou vzájemně nezávislé a stejně rozdělené náhodné veličiny. Budeme zaznamenávat počty gólů v  $n$  zápasech a naměříme tak veličiny  $X_1, \dots, X_n$ .

- (a) Nalezněte odhad  $\hat{\lambda}_n$  parametru  $\lambda$  momentovou metodou.  
 (b) Rozhodněte, zda je odhad  $\hat{\lambda}_n$  nestranný a konzistentní.  
 (c) Uvažujte odhady  $\check{\lambda}_n = (X_1 + X_n)/2$  a  $\tilde{\lambda}_n = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n X_i$ . Zjistěte, zda jsou tyto odhady nestranné a konzistentní odhady  $\lambda$ . Který z nich je rozumnější?

Dále nás bude zajímat odhad pravděpodobnosti, že v daném zápase nepadne ani jeden gól, tj. odhad  $p_0 = P(X_1 = 0) = e^{-\lambda}$ . Uvažujme následující dva odhady  $p_0$ :

$$W_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n I[X_i = 0], \quad V_n = e^{-\bar{X}_n}.$$

- (d) Vyšetřete vlastnosti odhadů  $W_n$  a  $V_n$   
 (e) Obdrželi jsme následující hodnoty: 0, 3, 1, 4, 1, 3, 2, 2, 2, 3, 3, 1, 3, 2, 3, 5, 3, 4, 5, 3. Spočítejte pro ně odhad  $\lambda$  i odhady  $p_0$ .  
 (f) Navrhněte odhad pravděpodobnosti, že v zápase padne přesně 6 gólů. Spočítejte pro výše uvedená data.
2. Uvažujte náhodný výběr  $X_1, \dots, X_n$  z rozdělení s hustotou

$$f(x) = \begin{cases} \frac{p}{x^{p+1}} & x \geq 1, \\ 0 & \text{jinak,} \end{cases}$$

kde  $p > 2$  je neznámý parametr.

- (a) Odhadněte parametr  $p$  momentovou metodou.  
 (b) Vyšetřete vlastnosti odhadu z (a).
3. Náhodná veličina  $X$  má normální rozdělení  $N(0, 1)$ . Nechť  $\mu \in \mathbb{R}$  a  $\sigma^2 > 0$  a  $Y = \sigma X + \mu$ .
- (a) Vyjádřete distribuční funkci  $Y$  pomocí distribuční funkce  $\Phi$ .  
 (b) Ukažte, že  $Y$  má  $N(\mu, \sigma^2)$  rozdělení. Diskutujte, jak se hustota tohoto rozdělení mění, budeme-li měnit  $\mu$  a  $\sigma^2$ .  
 (c) Určete střední hodnotu  $X$  a následně pomocí (b) střední hodnotu  $Y$ .  
 (d) Dokažte, že platí  $\Phi(x) + \Phi(-x) = 1$   
 (e) Určete pravděpodobnost  $P(|Y - \mu| \leq 2\sigma)$ .  
*Můžete využít, že  $\Phi(2) = 0.977$ .*

## OPAKOVÁNÍ

VLASTNOSTI ODHADŮ:

- Řekneme, že  $T_n$  je **nestranný** odhad  $\theta$ , jestliže  $\mathbf{E}T_n = \mathbf{E}_\theta T_n = \theta$  pro všechna  $\theta \in \Theta$ .
- Řekneme, že  $T_n$  je **konzistentní** odhad  $\theta$ , jestliže  $T_n \xrightarrow{\mathbf{P}} \theta$  pro  $n \rightarrow \infty$  pro všechna  $\theta \in \Theta$ , tj. platí, že pro všechna  $\varepsilon > 0$

$$\mathbf{P}_\theta(|T_n - \theta| > \varepsilon) \rightarrow 0 \quad \text{pro } n \rightarrow \infty \quad \text{pro všechna } \theta \in \Theta.$$

JENSENOVA NEROVNOST. Nechť  $Y$  je náhodná veličina a nechť  $g$  je konvexní funkce taková, že existuje  $\mathbf{E}g(Y)$ . Pak platí

$$\mathbf{E}g(Y) \geq g(\mathbf{E}Y)$$

a rovnost nastává jen v případě, kdy je  $Y$  konstanta (skoro jistě) nebo  $g$  je lineární funkce. Je-li  $g$  konkávní, dostáváme opačnou nerovnost.

MARKOVOVA NEROVNOST. Nechť  $Y \geq 0$  je náhodná veličina,  $\varepsilon > 0$  je libovolné a  $k \in \mathbb{N}$ . Pak

$$\mathbf{P}(Y > \varepsilon) \leq \frac{\mathbf{E}Y^k}{\varepsilon^k}.$$

(SLABÝ) ZÁKON VELKÝCH ČÍSEL. Nechť  $X_1, X_2, \dots$ , jsou nezávislé a stejně rozdělené náhodné veličiny s konečnou střední hodnotou  $\mathbf{E}X_1 = \mu$  a konečným rozptylem. Pak

$$\bar{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \xrightarrow{\mathbf{P}} \mu \quad \text{pro } n \rightarrow \infty.$$

VĚTA O SPOJITÉ TRANSFORMACI. Jestliže pro posloupnost náhodných veličin  $\{Y_n\}$  a  $a \in \mathbb{R}$  platí  $Y_n \xrightarrow{\mathbf{P}} a$  a  $g$  je spojitá funkce, pak  $g(Y_n) \xrightarrow{\mathbf{P}} g(a)$ .

NORMÁLNÍ ROZDĚLENÍ. Normální rozdělení  $\mathbf{N}(\mu, \sigma^2)$  má hustotu

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left\{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right\}, \quad x \in \mathbb{R},$$

kde  $\mu \in \mathbb{R}$  a  $\sigma^2 > 0$  jsou parametry.

- Je-li  $\mu = 0$  a  $\sigma^2 = 1$ , tj.  $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\{-x^2/2\}$ , pak se toto rozdělení nazývá **normované** normální rozdělení a značí se  $\mathbf{N}(0, 1)$ .
- **Distribuční funkce** rozdělení  $\mathbf{N}(0, 1)$  se značí jako  $\Phi$ , tj.  $\Phi(x) = \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\{-t^2/2\} dt$ . Tento určitý integrál je možné spočítat jen **numericky**, a proto hodnoty funkce  $\Phi$  nalezneme **v tabulkách** (nebo získáme pomocí vhodného softwaru).