Součty a funkce náhodných veličin

21/22.11.2023

1. Uvažujme posloupnost n znaků, ve které se každý znak zkreslí s pravděpodobností $p \in (0,1)$, a to nezávisle na ostatních znacích. Nechť X značí počet takto zkreslených znaků. Dále označme jako Y_i identifikátor toho, zda se i-tý znak zkreslí.
   (a) Připomeňte si, jaké rozdělení má X a jakou má střední hodnotu a rozptyl.
   (b) Vyjádřete X pomocí veličin $Y_1, \dots, Y_n$ a pomocí tohoto vyjádření spočtěte $\mathsf{E}X$ a $\mathsf{Var}\,X$.

2. V rybníce plave 100 rybiček, z nichž je a zlatých. Náhodně vylovíme 5 rybiček a náhodná veličina X udává, kolik zlatých rybiček jsme vylovili.
   (a) Vyjádřete analogicky jako v 1. veličinu X jako součet 0-1 náhodných veličin Y_i. Určete rozdělení Y_i.
   (b) Spočtěte očekávanou hodnotu X.
   (c) Jsou veličiny $Y_1, \dots, Y_n$ nezávislé? Pokud nejsou, spočtěte jejich kovarianci a korelaci.
   (d) Spočtěte rozptyl X.

3. Hmotnosti jednotlivých zásilek na poště jsou nezávislé náhodné veličiny, které mají všechny stejné rozdělení se střední hodnotou μ a rozptylem σ^2. Rozhodli jsme se změřit hmotnosti n zásilek a jsou to náhodné veličiny $X_1, \dots, X_n$.
   (a) Označme jako $\overline{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i$ průměrnou hmotnost zásilky. Spočtěte střední hodnotu a rozptyl této náhodné veličiny. Jak se bude rozptyl měnit, budeme-li zvyšovat n?

   Předpokládejme dále, že X_i mají rovnoměrné rozdělení na intervalu $[a,b]$, kde $0 < a < b$ jsou reálná čísla. Označme jako $M_n = \max_{i=1,\dots,n} X_i$ maximální hmotnost a $L_n = \min_{i=1,\dots,n} X_i$ minimální hmotnost.

   (b) Vyjádřete distribuční funkci a hustotu náhodné veličiny M_n.
   (c) Spočtěte očekávanou hodnotu M_n. Jak se bude tato hodnota chovat, budeme-li navyšovat počet pozorování n?
   (d) Spočtěte dále rozptyl M_n.
   (e) Vyjádřete rozdělení a spočtěte očekávanou hodnotu L_n.

4. Proveďte výpočet z předchozího příkladu pro veličiny X_i s exponenciálním rozdělením s hustotou $f(x) = e^{-x} I(x \geq 0)$.

Opakování

Jsou-li $X_1, \dots, X_n$ jsou náhodné veličiny a $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$, pak platí (za předpokladu existence daných momentů)

- $\mathsf{E}(\sum_{i=1}^n a_i X_i) = \sum_{i=1}^n a_i \mathsf{E} X_i$
- $\mathsf{Var}\,(\sum_{i=1}^n a_i X_i) = \sum_{i=1}^n a_i^2 \mathsf{Var}\, X_i + \sum\sum_{i \neq j} a_i a_j \mathsf{Cov}\,(X_i, X_j)$