Konvergence posloupnosti náhodných veličin
7.10.2019

1. Nechť $X_1, X_2 \dots$ jsou nezávislé náhodné veličiny s rovnoměrným rozdělením na $[0,1]$. Definujme $Y_n = \max\{X_1, \dots, X_n\}$. Ukažte, že pro $n \to \infty$ platí
   (a) $Y_n \xrightarrow{D} 1$,
   (b) $n(1 - Y_n) \xrightarrow{D} Y$, kde Y má exponenciální rozdělení s parametrem 1,
   (c) $Y_n \xrightarrow{P} 1$.
   (d) Definujme dále $U_n = \overline{X}_n$. Vyšetřete konvergenci $\{U_n\}$ v pravděpodobnosti a v distribuci.

2. Nechť $X_1, X_2, \dots$ jsou nezávislé, stejně rozdělené náhodné veličiny z Poissonova rozdělení s parametrem $\lambda > 0$.
   (a) Určete asymptotické rozdělení $\sqrt{n}(\overline{X}_n - \lambda)$.
   (b) Dokažte, že $\sqrt{n}\dfrac{\overline{X}_n - \lambda}{\sqrt{\overline{X}_n}}$ konverguje v distribuci k $\mathsf{N}(0,1)$.

3. Ukažte, že Studentovo t_n-rozdělení konverguje v distribuci k $\mathsf{N}(0,1)$ pro $n \to \infty$.

4. Nechť X_n má rovnoměrné rozdělení na $[0, 1/n]$ a definujte $Y_n = X_n^2$.
   (a) Vyšetřete konvergenci v distribuci $\{X_n\}$ pro $n \to \infty$.
   (b) Vyšetřete konvergenci v distribuci $\{Y_n\}$ pro $n \to \infty$.
   (c) Uvědomte si vztah (a) a (b).

5. Nechť $X_n \sim \mathsf{N}(\mu, 1/n)$.
   (a) Ukažte, že $X_n \xrightarrow{P} \mu$ pro $n \to \infty$.
   (b) Vyšetřete konvergenci v distribuci $\sqrt{n}(X_n - \mu)$.
   (c) Uvědomte si vztah (b) a (a).

6. Uvažujte posloupnost hodů mincí a náhodné veličiny X_n, které jsou identifikátory toho, zda v n-tém hodu padl orel. Nechť $Y_n = 1 - X_n$ a $X = X_1$.
   (a) Ukažte, že $X_n \xrightarrow{D} X$ a $Y_n \xrightarrow{D} X$, ale $\{X_n + Y_n\}$ nekonverguje v distribuci k $2X$.
   (b) Ukažte, že $(X_n, Y_n)^T$ nekonverguje v distribuci k $(X, X)^T$ (tj. konvergence po složkách neimplikuje konvergenci vektorů).

7. Nechť $X_1, X_2, \dots$ jsou nezávislé náhodné veličiny s exponenciálním rozdělením s hustotou $f(x) = \lambda \mathrm{e}^{-\lambda x} I[x \geq 0]$. Definujme $T_n = \dfrac{1}{\overline{X}_n}$.
   (a) Ukažte, že $T_n \xrightarrow{P} \lambda$ pro $n \to \infty$.
   (b) Najděte asymptotické rozdělení $\sqrt{n}(T_n - \lambda)$.
   (c) Najděte asymptotické rozdělení $\sqrt{n}\,\overline{X}_n(T_n - \lambda)$.

8. Cramérova-Woldova věta: $\mathbf{X}_n \xrightarrow{D} \mathbf{X}$ právě tehdy, když pro každé $\mathbf{t} \in \mathbb{R}^k$ platí $\mathbf{t}^T\mathbf{X}_n \xrightarrow{D} \mathbf{t}^T\mathbf{X}$. Pomocí předchozí věty a jednorozměrné CLV dokažte mnohorozměrnou verzi centrální limitní věty.

Opakování z přednášky

Nechť $\{\mathbf{X}_n\}$ je posloupnost k-rozměrných náhodných vektorů a $\mathbf{X}$ je k-rozměrný náhodný vektor. Pak řekneme, že

– $\mathbf{X}_n \xrightarrow{s.j.} \mathbf{X}$, pokud pro $n \to \infty$

$$\mathsf{P}(\{\omega : ||\mathbf{X}_n(\omega) - \mathbf{X}(\omega)|| \to 0\}) = 1,$$

– $\mathbf{X}_n \xrightarrow{P} \mathbf{X}$, pokud pro každé $\varepsilon > 0$

$$\mathsf{P}(\{\omega : ||\mathbf{X}_n(\omega) - \mathbf{X}(\omega)|| > \varepsilon\}) \to 0, \quad n \to \infty,$$

– $\mathbf{X}_n \xrightarrow{D} \mathbf{X}$, pokud pro $n \to \infty$ platí

$$F_n(\mathbf{x}) \to F(\mathbf{x}) \quad \text{ve všech bodech } \mathbf{x}, \text{ ve kterých je } F \text{ spojitá},$$

kde F_n je distribuční funkce $\mathbf{X}_n$ a F je distribuční funkce $\mathbf{X}$.

Platí:

– konvergence náhodných vektorů implikuje konvergenci po složkách, opak platí jen pro konvergence s.j. a v P,

– platí $\mathbf{X}_n \xrightarrow{s.j.} \mathbf{X} \Rightarrow \mathbf{X}_n \xrightarrow{P} \mathbf{X} \Rightarrow \mathbf{X}_n \xrightarrow{D} \mathbf{X}$ a žádná z implikací obecně opačně neplatí,

– jestliže $\mathbf{X}_n \xrightarrow{D} \mathbf{k} \equiv konst \Rightarrow \mathbf{X}_n \xrightarrow{P} \mathbf{k}$,

– spojitá transformace zachovává všechny uvedené konvergence,

– **Cramérova-Slutského věta** (CS): (*jednorozměrná verze*): Nechť $\{X_n\}, \{Y_n\}, \{Z_n\}$ jsou posloupnosti náhodných veličin takových, že $X_n \xrightarrow{D} X$, $Y_n \xrightarrow{P} c$ a $Z_n \xrightarrow{P} d$, kde X je náhodná veličina a $c, d \in \mathbb{R}$ jsou reálné konstanty. Pak

$$Y_n \cdot X_n + Z_n \xrightarrow{D} cX + d.$$

Pro $c \neq 0$ platí také

$$X_n / Y_n \xrightarrow{D} X/c.$$

– **Silný zákon velkých čísel** (SZVČ): Nechť $\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \ldots$ je náhodný výběr z rozdělení s konečnou střední hodnotou $\boldsymbol{\mu}$. Pak $\overline{\mathbf{X}}_n \xrightarrow{s.j.} \boldsymbol{\mu}$ pro $n \to \infty$.

– **Centrální limitní věta** (CLV): Nechť $\{\mathbf{X}_n\}$ je náhodný výběr z rozdělení se střední hodnotou $\boldsymbol{\mu}$ a konečnou rozptylovou maticí $\boldsymbol{\Sigma}$. Pak platí

$$\sqrt{n}(\overline{\mathbf{X}}_n - \boldsymbol{\mu}) \xrightarrow{D} \mathsf{N}(0, \boldsymbol{\Sigma}), \quad n \to \infty.$$

– **Delta metoda** (*jednorozměrná verze*): Nechť $\{T_n\}$ splňuje $\sqrt{n}(T_n - \mu) \xrightarrow{D} \mathsf{N}(0, \sigma^2)$ pro nějaké $\mu \in \mathbb{R}$ a $\sigma^2 \geq 0$ a nechť $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ má spojitou derivaci na nějakém okolí bodu μ, pak

$$\sqrt{n}(g(T_n) - g(\mu)) \xrightarrow{D} \mathsf{N}(0, [g'(\mu)]^2\sigma^2), \quad n \to \infty.$$