
MOMENTOVÁ METODA, INTERVALOVÉ ODHADY

04.11.2019

1. Necht' X_1, \dots, X_n je náhodný výběr z Poissonova rozdělení s parametrem $\lambda > 0$.
 - (a) Odhadněte neznámý parametr λ momentovou metodou. Jaké je asymptotické rozdělení tohoto odhadu?
 - (b) Na základě odhadu z části (a) najděte klasický asymptotický intervalový odhad λ .
 - (c) Podobně odvoďte, jak vypadá spolehlivostní množina B_n .
 - (d) Zkonstruuje také interval spolehlivosti založený na transformaci stabilizující asymptotický rozptyl.
 - (e) Napište také oba jednostranné (klasické asymptotické) intervalové odhady pro λ .
2. Necht' X_1, \dots, X_n je náhodný výběr z rovnoměrného rozdělení na $[0, \theta]$, $\theta > 0$.
 - (a) Nalezněte momentový odhad θ a pomocí něj zkonstruuje (asymptotický) intervalový odhad θ , a to analogickým způsobem jako v (b)–(d) v předchozím příkladě.
 - (b) Uvažujte $U_n = \max_{1 \leq i \leq n} X_i$ odhad parametru θ . Sestrojte přesný (nikoliv asymptotický) intervalový odhad θ založený na U_n/θ .
3. Necht' X_1, \dots, X_n je náhodný výběr s hustotou $f(x; b) = xb^{-2} \exp(-x^2/2b^2)I[x \geq 0]$ pro $b > 0$.
 - (a) Nalezněte odhad \hat{b}_n parametru b momentovou metodou.
 - (b) Nalezněte asymptotické rozdělení \hat{b}_n a na jeho základě sestrojte klasický asymptotický intervalový odhad b .
4. Necht' X_1, \dots, X_n je náhodný výběr z rozdělení s hustotou $f(x; p) = px^{-p-1}I[x > 1]$, pro $p > 0$. Najděte odhad p momentovou metodou a odvoďte klasický asymptotický intervalový odhad p .
5. Uvažujte X_1, \dots, X_n náhodný výběr z rovnoměrného rozdělení na intervalu $[-a, a]$, kde $a > 0$. Odhadněte parametr a metodou momentů a sestrojte intervalový odhad.

OPAKOVÁNÍ Z PŘEDNÁŠKY

MOMENTOVÁ METODA Nechť $X = (X_1, \dots, X_n)$ je náhodný výběr z rozdělení $F_X \in \mathcal{F}$.

- Nechť $\theta_X = t(F_X) \in \mathbb{R}$ je nějaký parametr tohoto rozdělení a nechť $\mathbf{E}X_1 = g(\theta_X)$ pro nějakou ryze monotónní funkci $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Momentový odhad $\hat{\theta}_n$ se získá jako řešení $\bar{X}_n = g(\hat{\theta}_n)$, neboli

$$\hat{\theta}_n = g^{-1}(\bar{X}_n).$$

- V případě, že $\mathbf{E}X_1$ nezávisí na θ_X , nebo pokud $\theta_X \in \mathbb{R}^d$, $d > 1$, pak do odhadovacího procesu analogickým způsobem zapojíme momenty vyšších řádů, tj. $\mathbf{E}X^k$ a $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^k$.

KONSTRUKCE INTERVALOVÝCH ODHADŮ Chceme zkonstruovat intervalový odhad pro parametr θ_X , přičemž máme odhad $\hat{\theta}_n$ tohoto parametru, pro který platí

$$\sqrt{n}(\hat{\theta}_n - \theta_X) \xrightarrow{D} \mathbf{N}(0, \sigma^2(\theta_X)),$$

kde $\sigma^2(\cdot)$ je funkce spojitá ve skutečné hodnotě parametru θ_X .

- **Klasický asymptotický interval spolehlivosti** vychází z asymptotického rozdělení $\hat{\theta}_n$ a z Cramérový-Sluckého věty. Jelikož $\frac{\sqrt{n}(\hat{\theta}_n - \theta_X)}{\sigma(\hat{\theta}_n)} \xrightarrow{D} \mathbf{N}(0, 1)$, platí

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}\left(-u_{1-\alpha/2} \leq \frac{\sqrt{n}(\hat{\theta}_n - \theta_X)}{\sigma(\hat{\theta}_n)} \leq u_{1-\alpha/2}\right) = 1 - \alpha,$$

a tedy

$$\left(\hat{\theta}_n - \frac{u_{1-\alpha/2} \sigma(\hat{\theta}_n)}{\sqrt{n}}, \hat{\theta}_n + \frac{u_{1-\alpha/2} \sigma(\hat{\theta}_n)}{\sqrt{n}}\right) \tag{1}$$

je intervalový odhad parametru θ_X o asymptotické spolehlivosti $1 - \alpha$.

- Jiný možný postup využívá přímo, že pro množinu

$$B_n = \left\{ \theta : \left| \frac{\sqrt{n}(\hat{\theta}_n - \theta)}{\sigma(\theta)} \right| \leq u_{1-\alpha/2} \right\} \tag{2}$$

platí, že $\mathbf{P}(B_n \ni \theta_X) \rightarrow 1 - \alpha$. Zpravidla je B_n interval, ale obecně může být zadán jen implicitně.

- **Interval spolehlivosti založený na transformaci stabilizující asymptotický rozptyl.**

Nechť g je taková, že $[g'(\theta)]^2 \sigma^2(\theta) = 1$, pak z Δ -metody dostáváme, že $\sqrt{n}(g(\hat{\theta}_n) - g(\theta_X)) \xrightarrow{D} \mathbf{N}(0, 1)$ a tedy

$$\left(g(\hat{\theta}_n) - \frac{u_{1-\alpha/2}}{\sqrt{n}}, g(\hat{\theta}_n) + \frac{u_{1-\alpha/2}}{\sqrt{n}}\right)$$

je intervalový odhad pro $g(\theta)$. Z něj pak invertováním obou mezí získáme intervalový odhad parametru θ_X o asymptotické spolehlivosti $1 - \alpha$.