Zápočtová písemka z NMSA332
Varianta V - 2020

Příklad 1 (14 bodů)

Mějme náhodný výběr $X_1, \dots, X_n$ z rozdělení

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\lambda}\, e^{-(x-\delta)/\lambda}, & x \in [\delta, \infty), \\ 0, & \text{jinak}, \end{cases}$$

kde $\delta \in \mathbb{R}$ a $\lambda > 0$ jsou neznámé parametry. Označme $\boldsymbol{\theta} = (\delta, \lambda)^\mathsf{T}$.

(i) Je statistika $\mathbf{T}_1(\boldsymbol{X}) = \left(\sum_{i=1}^n X_i,\, \sum_{i=1}^n X_i^2,\, \min_{1 \le i \le n} X_i\right)^\mathsf{T}$ postačující pro $\boldsymbol{\theta}$?

(ii) Předpokládejte, že $\delta = 1$. Najděte nejlepší nestranný odhad parametru λ.

Příklad 2 (24 bodů)

Nechť $X_1, \dots, X_n$ je náhodný výběr z Poissonova rozdělení s parametrem $\lambda_1 + \lambda_2$ a $Y_1, \dots, Y_m$ je náhodný výběr z Poissonova rozdělení s parametrem λ_2, přičemž oba dva výběry jsou na sobě nezávislé a oba parametry $\lambda_1 > 0$ a $\lambda_2 > 0$ jsou neznámé.

(i) Najděte dolní Raovu-Cramérovu mez pro odhad parametru λ_1.

(ii) Je odhad $\overline{Y}_m = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^m Y_i$ nejlepším nestranným odhadem parametru λ_2?

(iii) Je odhad $\frac{1}{\overline{Y}_m} = \frac{1}{\frac{1}{m}\sum_{i=1}^m Y_i}$ nejlepším nestranným odhadem parametrické funkce $\frac{1}{\lambda_2}$?

Příklad 3 (12 bodů)

Nechť $(X, Y)^\mathsf{T}$ je náhodný vektor s hustotou

$$f(x, y) = \begin{cases} x + 6y, & x \in (0,1), y \in (0, \frac{1}{2}), \\ 0, & \text{jinak}. \end{cases}$$

(i) Určete $\mathsf{E}\left[\frac{Y}{X} \,\middle|\, X^2 = t\right]$. Pro jaká t má tento výraz smysl?

(ii) Určete $\mathsf{E}\left[\frac{Y}{X} \,\middle|\, e^X\right]$.