Statistický seminář

Blatská, Hlaváčová

Waldovy rovnosti

29. února 2024

Úvod

- rozdílné značení
- Uvažujme $X = (X_1, X_2, \dots)$ náhodnou posloupnost definovanou na pravděpodobnostním prostoru $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.

Filtrace

Mějme $(\Omega, \mathcal{F})$ měřitelný prostor a $\mathcal{F}_1 \subseteq \mathcal{F}_2 \subseteq \dots \mathcal{F}$ neklesající posloupnost σ-algeber. Potom $\{\mathcal{F}_n, n \in \mathbb{N}\}$ nazveme filtrací.

Markovský čas

Řekneme, že zobrazení $T : \Omega \mapsto \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ je markovský čas vzhledem k filtraci $\{\mathcal{F}_n\}$, pokud pro všechna $n \in \mathbb{N}$ platí $[T \leq n] \in \mathcal{F}_n$.

Martingal

Nechť $\{\mathcal{F}_n\}$ je filtrace a nechť $X = (X_1, X_2, \dots)$ je posloupnost integrovatelných náhodných veličin. Řekneme, že X je $\mathcal{F}_n$-martingal, pokud filtrace $\{\mathcal{F}_n\}$ splňuje $\sigma(X_1, ..., X_n) \subseteq \mathcal{F}_n \; \forall n \in \mathbb{N}$ a $\mathrm{E}\,[X_{n+1}|\mathcal{F}_n] = X_n$ s.j. $\forall n \in \mathbb{N}$.

Věta 1

Nechť $X_1, X_2, \dots$ je $\mathcal{F}_n$-martingal a T je markovský čas, vzhledem k filtraci $\{\mathcal{F}_n\}$, s konečnou střední hodnotou. Dále nechť existuje $c \in (0, \infty)$ takové, že jev $T > n$ implikuje $\mathrm{E}^{\mathcal{F}_n} |X_{n+1} - X_n| \leq c$ s.j. $\forall n \in \mathbb{N}$. Potom

$$\mathrm{E}\;|X_T| < \infty, \; \mathrm{E}\;X_T = \mathrm{E}\;X_1.$$

Věta. Waldova rovnost I

Mějme posloupnost nezávislých stejně rozdělených náhodných veličin $X_1, X_2, \dots$ s konečnou střední hodnotou a nechť T je markovský čas vzhledem k $\mathcal{F}_n = \sigma(X_1, \dots, X_n)$ a má též konečnou střední hodnotu. Potom pro $S_T = \sum_{k=1}^{T} X_k$ platí

$$\mathrm{E}\ S_T = \mathrm{E}\ T \cdot \mathrm{E}\ X_1.$$

- T je náhodná veličina
- důkaz

Věta. Waldova rovnost II

Nechť jsou splněny předpoklady Waldovy rovnosti I a navíc platí $\mathrm{E}\, X_1 = 0, \mathrm{E}\, X_1^2 < \infty$ a nechť existuje $c \in (0, \infty)$ takové, že jev $T > n$ implikuje $|S_n| \leq c$ s.j. $\forall n \in \mathbb{N}$. Potom pro $S_T = \sum_{k=1}^{T} X_k$ platí

$$\operatorname{var} S_T = \mathrm{E}\, T \cdot \operatorname{var} X_1 .$$

- idea důkazu

Waldovy rovnosti - příklad

Příklad

Dva hráči hrají hru. Předpokládejme, že hráč A začíná s 5 mincemi a hráč B začíná s 10 mincemi. V každém kole je v sázce 1 mince, kterou získává vítěz daného kola od soupeře a hrají do té doby, dokud jeden z nich nepřijde o všechny peníze. Předpokládejme, že v každém kole mají oba stejnou pravděpodobnost výhry a nemůže dojít k remíze. Jaká je pravděpodobnost, že celkově vyhraje A (respektive B)? Jaký je očekávaný počet odehraných kol?

Waldovy rovnosti - fundamentální identita

Věta. Waldova fundamentální identita

Mějme posloupnost nezávislých stejně rozdělených náhodných veličin $X_1, X_2, \ldots$ takových, že $1 \leq \varphi(t_1) = \mathrm{E}\exp\{t_1 \cdot X_1\} < \infty$ pro nějaké $t_1 \in \mathbb{R}$. Nechť T je markovský čas vzhledem k $\mathcal{F}_n = \sigma(X_1, \ldots, X_n)$ s konečnou střední hodnotu a takový, že existuje $c > 0$ takové, že jev $T > n$ implikuje jev $|S_n| \leq c$ s.j.. Potom platí

$$\mathrm{E}\left(\exp\{t_1 \cdot S_T\} \cdot (\varphi(t_1))^{-T}\right) = 1.$$

Momentová vytvořující funkce

Věta. Vlastnosti momentové vytvořující funkce

Nechť $\varphi(t) = \mathrm{E}\, \exp\{tX\} < \infty$ pro $t = -b, b$, kde $b > 0$. Potom platí

- je konečná na $[-b, b]$,
- je konvexní a spojitá na $[-b, b]$,
- má konvexní spojité derivace všech řádů na $(-b, b)$,
- $\mathrm{E}\, |X|^r < \infty$ pro $r \geq 1$ a $\varphi^{(r)}(0) = \mathrm{E}\, X^r$.

Příklad

Mějme posloupnost nezávislých stejně rozdělených náhodných veličin $X_1, X_2, \ldots$ s rozdělením $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$.

Momentová vytvořující funkce

Věta

Nechť $\varphi(t) = \mathrm{E}\exp\{tX\} < \infty\ \forall t \in \mathbb{R}$, $P(X < 0) > 0$ a $P(X > 0) > 0$. Potom platí

- je-li $\mathrm{E}\,X \neq 0$, pak existuje právě jeden bod $t_0 \neq 0$ takový, že $\varphi(t_0) = 1$,
- je-li $\mathrm{E}\,X = 0$, pak $\varphi(t) = 1$ implikuje $t = 0$.

- důsledky

Věta

Mějme posloupnost nezávislých stejně rozdělených náhodných veličin $X_1, X_2, \ldots$ takových, že $P(X_i \neq 0) > 0$. Nechť B je omezená borelovská množina obsahující 0 a nechť

$$T = \min\left(n : \sum_{i=1}^{n} X_i \notin B\right).$$

Pak T je markovský čas vzhledem ke kanonické filtraci a $\varphi(t) = \mathrm{E}\exp\{tT\}$ je funkce konečná v některém intervalu $(-\infty, t_0), t_0 > 0$ a tedy $\mathrm{E}\, T^r < \infty\ \forall r \geq 1$.

Příklad

Mějme T čas prvního výstupu posloupnosti $X_1, X_2, \ldots$ z množiny $B = (b, a)$ pro $-\infty < b < 0 < a < \infty$.

Momentová vytvořující funkce

Věta

Mějme posloupnost nezávislých stejně rozdělených náhodných veličin $X_1, X_2, \ldots$ takových, že $P(X_1 - c_1 < 0) > 0, P(X_1 - c_2 > 0) > 0$. Definujme

$$T = \min \left(n : \sum_{i=1}^{n} X_i \notin (b_1 + nc_1, a_1 + nc_1) \cup (b_2 + nc_2, a_2 + nc_2) \right),$$

kde $b_j < 0 < a_j, j = 1, 2, c_1 < c_2$ jsou reálná čísla. Pak T je markovský čas vzhledem ke kanonické filtraci a $\varphi(t) = \mathrm{E} \exp\{tT\}$ je funkce konečná v některém intervalu $(-\infty, t_0), t_0 > 0$ a tedy $\mathrm{E}\ T^r < \infty$ $\forall r \geq 1$.

Děkujeme za pozornost!