MATEMATICKO-FYZIKÁLNÍ FAKULTA
Univerzita Karlova

Březinová, Kluvancová

Waldův sekvenční test

14. března 2024

Připomenutí z minule

- Uvažujme posloupnost $\{X_i\}_{i=1}^{\infty}$ iid náhodných veličin z rozdělení s hustotou $f(x;\,\theta)$, kde $\theta \in \Theta$.
- Nechť pro posloupnosti borelovských množin $\{B_i\}_{i=1}^{\infty}$, $\{B_i^0\}_{i=1}^{\infty}$, $\{B_i^1\}_{i=1}^{\infty}$ platí:
  - pro každé i jsou množiny B_i, B_i^0, B_i^1 disjunktní,
  - $\mathbb{R} = B_1 \cup B_1^0 \cup B_1^1$,
  - $B_{i-1} \times \mathbb{R} = B_i \cup B_i^0 \cup B_i^1 \subset \mathbb{R}^i$
- Testem hypotézy $\mathrm{H}_0 : \theta \in \Theta_0$ proti $\mathrm{H}_1 : \theta \in \Theta_1$ rozumíme pravidlo
  - přijmeme H_0, jestliže $(X_1, \ldots, X_n) \in B_n^0$,
  - přijmeme H_1, jestliže $(X_1, \ldots, X_n) \in B_n^1$,
  - přecházíme k náhodnému výběru $(X_1, \ldots, X_{n+1})$.

Připomenutí z minule

- Operační charakteristika testu S hypotézy H_0 proti alternativě H_1

$$L_S(\theta) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathrm{P}\left((X_1, \ldots, X_i) \in B_i^0;\, \theta\right).$$

- Silofunkce

$$P_S(\theta) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathrm{P}\left((X_1, \ldots, X_i) \in B_i^1;\, \theta\right).$$

- Rozsah náhodného výběru

$$\mathrm{N} = \min\left\{n;\, (X_1, \ldots, X_n) \in \mathrm{B}_n^0 \cup \mathrm{B}_n^1\right\}.$$

- Střední rozsah náhodného výběru

$$\mathrm{E}_S(N;\, \theta).$$

Připomenutí z minule

- Pro $\theta_0, \theta_1 \in \Theta$ definujme

$$Q_n(\theta_0, \theta_1) = \sum_{i=1}^{n} Z_i(\theta_0, \theta_1),$$

kde

$$\begin{aligned} Z_i(\theta_0, \theta_1) &= \log \frac{f(X_i;\, \theta_1)}{f(X_i;\, \theta_0)}, && \text{je-li } f(X_i;\, \theta_0) \neq 0,\ f(X_i;\, \theta_1) \neq 0, \\ &= 1 \qquad\qquad\qquad , && \text{je-li } f(X_i;\, \theta_0) = 0,\ f(X_i;\, \theta_1) = 0, \\ &= -\infty \qquad\qquad\quad , && \text{je-li } f(X_i;\, \theta_0) \neq 0,\ f(X_i;\, \theta_1) = 0, \\ &= +\infty \qquad\qquad\quad , && \text{je-li } f(X_i;\, \theta_0) = 0,\ f(X_i;\, \theta_1) \neq 0. \end{aligned}$$

Věta

Nechť $\{X_i\}_{i=1}^{\infty}$ je posloupnost iid náhodných veličin z rozdělení s hustotou $f(x;\, \theta)$, $\theta \in \Theta$ (obsahující alespoň dva body). Pak mezi všemi testy S (sekvenčními i nesekvenčními)

$$\mathrm{H}_0 : \theta = \theta_0 \quad \text{proti} \quad \mathrm{H}_1 : \theta = \theta_1, \quad \theta_0 \neq \theta_1 \in \Theta,$$

které náleží do $\mathcal{C}(\alpha,\, \beta)$ a pro které $\mathrm{E}_S(N;\, \theta_i) < +\infty$, $i = 0,\, 1$, je Waldův test $S(b,\, a)$ stejnoměrně eficientní v bodech θ_0 a θ_1 , tj.

$$\mathrm{E}_{S(b,\, a)}(N;\, \theta_i) = \min_{S \in \mathcal{C}(\alpha,\, \beta)} \mathrm{E}_S(N;\, \theta_i), \quad i = 0,\, 1.$$

Předpoklady

- $X_1, X_2, X_3, \ldots$ iid náhodné veličiny, X_i má hustotu $f(x, \theta), \theta \in \Theta = (\underline{\theta}, \overline{\theta})$
- $\mathrm{H}_0 : \theta = \theta_0$ proti $\mathrm{H}_1 : \theta = \theta_1, \theta_0 \neq \theta_1 \in \Theta$
- Označme

$$\mathrm{P}(\text{přijmeme } \mathrm{H}_0 , \theta_1) = \beta$$
$$\mathrm{P}(\text{zamítáme } \mathrm{H}_0, \theta_0) = \alpha$$

- Označme $b = \log B \geq \log \frac{\beta}{1-\alpha}$, $a = \log A \leq \log \frac{1-\beta}{\alpha}$

Waldův test $S(b, a)$

- Máme testovou statistiku $Q_n(\theta_0, \theta_1)$
- Test: na základě $(X_1, ..., X_n)$ náhodného výběru z rozdělení s hustotou $f(x, \theta)$
  - přijmeme H_0 a zastavujeme náhodný výběr, pokud $Q_n(\theta_0, \theta_1) \leq b$
  - přijímáme H_1 a zastavujeme náhodný výběr, pokud $Q_n(\theta_0, \theta_1) \geq a$
  - v náhodném výběru pokračujeme, pokud $Q_n(\theta_0, \theta_1) \in (b, a)$
  - *kritické nerovnosti*
- *Sekvenční test poměrem pravděpodobností*

Příklad

- $\mathrm{H}_0 : p = p_0$ proti $\mathrm{H}_1 : p = p_1$
- Máme testovou statistiku

$$T_n = \prod_{i=1}^{n} \frac{P(X_i; p_1)}{P(X_i; p_0)} = \left(\frac{p_1(1-p_0)}{p_0(1-p_1)}\right)^{\sum_{i=1}^{n} X_i} \cdot \left(\frac{1-p_1}{1-p_0}\right)^{n}$$

- Označme $a = \log A, b = \log B$
- Test: na základě $(X_1, ..., X_n)$
  - přijmeme H_0, pokud $\sum_{i=1}^{n} X_i \leq \frac{b}{\log \frac{p_1(1-p_0)}{p_0(1-p_1)}} + n \frac{\log \frac{1-p_0}{1-p_1}}{\log \frac{p_1(1-p_0)}{p_0(1-p_1)}}$
  - přijímáme H_1, pokud $\sum_{i=1}^{n} X_i \geq \frac{a}{\log \frac{p_1(1-p_0)}{p_0(1-p_1)}} + n \frac{\log \frac{1-p_0}{1-p_1}}{\log \frac{p_1(1-p_0)}{p_0(1-p_1)}}$
  - v náhodném výběru pokračujeme, pokud $\sum_{i=1}^{n} X_i$ leží mezi těmito hodnotami

Základní vlastnosti

- Pro Waldův sekvenční test $S(b, a)$ platí

$$a \leq \log \frac{1-\beta}{\alpha}, \quad b \geq \log \frac{\beta}{1-\alpha}.$$

- Označme $b^* = \log \frac{\beta}{1-\alpha}$, $a^* = \log \frac{1-\beta}{\alpha}$
- Označme α^*, β^* pravděpodobnosti chyb 1. a 2. druhu odpovídající testu $S(b^*, a^*)$
- Platí vztahy:

$$\alpha^* < \frac{\alpha}{1-\beta}, \qquad \beta^* < \frac{\beta}{1-\alpha}, \qquad \alpha^* + \beta^* \leq \alpha + \beta,$$

- Nerovnost $b < a$ implikuje

$$b^* < a^*, \qquad \alpha < 1 - \beta.$$

- Hodnotami b^*, a^* obvykle aproximujeme hodnoty b, a.

Základní vlastnosti

- Za velmi obecných podmínek končí Waldův test s pravděpodobností 1 a má konečnou momentovou vytvořující funkci
- Test končí s pravděpodobností 1, jestliže

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{P}\left((X_1, \ldots, X_n) \in B_n;\ \theta\right) = 0 \quad \text{pro každé } \theta \in \Theta.$$

Věta

Nechť

$$\mathrm{P}\left(\frac{f(X_i, \theta_1)}{f(X_i, \theta_0)} > 1;\ \theta\right) > 0, \quad \mathrm{P}\left(\frac{f(X_i, \theta_1)}{f(X_i, \theta_0)} < 1;\ \theta\right) > 0, \quad \theta \in \Theta.$$

Pak test $S(b, a)$, $-\infty < b < 0 < a < +\infty$, skončí s pravděpodobností 1, $\mathrm{E}(N^k;\ \theta) < +\infty$ pro libovolné $k > 0$ a $\theta \in \Theta$ a existuje číslo $t_0(\theta) > 0$ takové, že $\mathrm{E}(\exp\{tN\};\ \theta) < +\infty$ pro všechna $t \leq t_0(\theta)$.

Základní vlastnosti

Věta

Nechť $S(b, a)$ a $S(b^*, a^*)$ jsou Waldovy testy pro úlohu $H_0 : \theta = \theta_0$ proti $H_1 : \theta = \theta_1$. Nechť $L(\theta)$, $P(\theta)$ a $L^*(\theta)$, $P^*(\theta)$ jsou odpovídající operační charakteristiky a silofunkce splňující

$$P(\theta_0) > P^*(\theta_0), \quad L(\theta_1) > L^*(\theta_1).$$

Pak platí

$$b^* \leq b < a \leq a^*,$$

kde alespoň jedna nerovnost $b^* \leq b$, $a \leq a^*$ je ostrá,

$$E(N; \theta) \leq E(N^*; \theta) \quad \text{pro všechna } \theta \in \Theta,$$

kde N a N^* jsou rozsahy výběru příslušné $S(b, a)$ resp. $S(b^*, a^*)$. Je-li $E(N; \theta) = +\infty$, je též $E(N^*; \theta) = +\infty$.

Zobecněný Waldův test

- Test $S(\{b_n, a_n\}_{n=1}^{\infty})$, $b_n < a_n$, $n = 1, 2, ...,$ hypotézy $\mathrm{H}_0 : \theta = \theta_0$ proti $\mathrm{H}_1 : \theta = \theta_1$ s rozhodovacím pravidlem:

  Na základě náhodného výběru $(X_1, ..., X_n)$
  - přijmeme H_0, pokud $Q_n(\theta_0, \theta_1) \leq b_n$,
  - přijímáme H_1, pokud $Q_n(\theta_0, \theta_1) \geq a_n$,
  - jinak pokračujeme v náhodném výběru.

Věta

Pro každý Waldův zobecněný test $S(\{b_n, a_n\}_{n=1}^{\infty})$ platí

$$L(\theta_0) \geq L(\theta_1)$$
$$P(\theta_0) \leq P(\theta_1).$$

- důkaz na tabuli
- interpretace - Waldův test je nestranný

Zobecněný Waldův test

- Darmois- Koopmanův typ rozdělení:

$$f(x,\theta) = C(\theta)\exp\{D(\theta)T(x)\}h(x), \qquad x \in \mathrm{E} \subset \mathbb{R}_1, \theta \in \Theta,$$

- např. normální, binomické, Poissonovo rozdělení
- Waldův test pro $\mathrm{H}_0 : \theta = \theta_0$ proti $\mathrm{H}_1 : \theta = \theta_1, \theta_0 < \theta_1$, na základě náhodného výběru $(X_1, ..., X_n)$ z rozdělení tohoto typu:
  - přijmeme H_0, pokud $\sum_{i=1}^n T(X_i) \leq \frac{b_n + n\log(C(\theta_0)/C(\theta_1))}{D(\theta_1) - D(\theta_0)}$
  - přijmeme H_1, pokud $\sum_{i=1}^n T(X_i) \geq \frac{a_n + n\log(C(\theta_0)/C(\theta_1))}{D(\theta_1) - D(\theta_0)}$
  - jinak pokračujeme ve výběru.

Zobecněný Waldův test

Věta

Nechť $\{X_i\}_{i=1}^{\infty}$ je posloupnost iid náhodných veličin s hustotou Darmois-Koopmanova typu. Pak libovolný zobecněný Waldův test $S(\{b_n, a_n\}_{n=1}^{\infty})$, pro úlohu $\mathrm{H}_0 : \theta = \theta_0$ proti $\mathrm{H}_1 : \theta = \theta_1, \theta_0 < \theta_1 \in \Theta$ má nerostoucí operační charakteristiku na intervalu Θ.

- Nelze obecně vyjádřit pomocí ne příliš složité funkce

Věta

Nechť $\mathrm{E}(\exp\{tZ_1\};\,\theta) < +\infty$ pro všechna t reálná a všechna $\theta \in \Theta$, $b < 0 < a$, nechť platí předpoklady Věty 2.2. Pak existuje reálná funkce $h(\theta)$ definovaná na Θ, rovna nule jen v bodě θ^*, pro který $\mathrm{E}(Z_1;\,\theta^*) = 0$ a taková, že

$$\mathrm{E}(\exp\{h(\theta)Q_N\};\,\theta) = 1 \quad \text{pro všechna } \theta \in \Theta.$$

Aproximace operační charakteristiky

- Využíváme aproximaci

$$\mathrm{L}_S(\theta) \cong \widehat{\mathrm{L}_S}(\theta) = \frac{1 - e^{h(\theta)a}}{e^{h(\theta)b} - e^{h(\theta)a}}, \quad \mathrm{E}(Z_1;\, \theta) \neq 0.$$

- Pro $\mathrm{E}(Z_1;\, \theta^*) = 0$ tímto způsobem žádnou aproximaci neobdržíme.
- Je-li $h(\theta)$ na okolí θ^* spojitá a různá od nuly, pak

$$\mathrm{L}_S(\theta^*) \cong \widehat{\mathrm{L}_S}(\theta^*) = \lim_{\theta \to \theta^*} \frac{1 - e^{h(\theta)a}}{e^{h(\theta)b} - e^{h(\theta)a}} = \frac{a}{a-b}.$$

- Předpokládejme, že
  - $0 < |\mathrm{E}(Z_1;\, \theta)| < +\infty$
  - $\mathrm{P}\left(\frac{f(X_i,\theta_1)}{f(X_i,\theta_0)} > 1;\, \theta\right) > 0, \quad \mathrm{P}\left(\frac{f(X_i,\theta_1)}{f(X_i,\theta_0)} < 1;\, \theta\right) > 0, \quad \theta \in \Theta.$
- Využíváme aproximaci

$$\begin{aligned} \mathrm{E}_S(N;\, \theta) \cong \widehat{\mathrm{E}_S}(N;\, \theta) &= \frac{\mathrm{L}_S(\theta)b + (1 - \mathrm{L}_S(\theta))a}{\mathrm{E}(Z_1;\, \theta)}, \\ \cong \widehat{\widehat{\mathrm{E}_S}}(N;\, \theta) &= \frac{\widehat{\mathrm{L}_S}(\theta)b + (1 - \widehat{\mathrm{L}_S}(\theta))a}{\mathrm{E}(Z_1;\, \theta)}, \quad \mathrm{E}(Z_1;\, \theta) \neq 0. \end{aligned}$$

Příklad

- $X_1, X_2, \ldots$ iid náhodné veličiny, $X_i \sim \text{Alt}(p), p \in [0, 1]$
- $\text{H}_0 : p = p_0$ proti $\text{H}_1 : p = p_1, 0 \leq p_0 < p_1 \leq 1$

1. $p_0 = 0 < p_1 < 1$
2. $p_0 = 0,\ p_1 = 1$
3. $0 < p_0 < p_1 < 1$

Příklad

p	$L(p)$	$\widehat{L}(p)$	$E(N, p)$	$\widehat{\widehat{E}}(N, p)$
0.45	0.9868	0.9853	23.16	22.00
0.50	0.9456	0.9424	31.83	30.08
0.60	0.4953	0.5000	51.63	48.17
0.70	0.0432	0.0492	31.85	30.65