

Různé sekvenční testy a simulace II

Král, Krynická

11. dubna 2024

Obsah

- Waldův test v normálním rozdělení + simulace,
- Sekvenční testy pro porovnání parametrů dvou rozdělení,
- Příklad v alternativním rozdělení + simulace.

Základní pojmy pro obecný sekvenční test

- posloupnosti borel. množin $\{B_i\}_{i=1}^{\infty}$, $\{B_i^0\}_{i=1}^{\infty}$, $\{B_i^1\}_{i=1}^{\infty}$,
- statistický test S ,
- test S skončí s pravděpodobností 1,
- operační charakteristika

$$L_S(\theta) = \sum_{k=1}^{\infty} P((X_1, \dots, X_k) \in B_k^0; \theta),$$

- rozsah a střední rozsah náhodného výběru

$$N = \min\{n; (X_1, \dots, X_n) \in B_n^0 \cup B_n^1\}, \quad E_S(N; \theta).$$

Testová statistika pro obecný sekvenční test

Pro $\theta_0, \theta_1 \in \Theta$ definujeme

$$\begin{aligned} Z_i(\theta_0, \theta_1) &= \log \frac{f(X_i; \theta_1)}{f(X_i; \theta_0)}, & \text{je-li } f(X_i; \theta_0) \neq 0, f(X_i; \theta_1) \neq 0, \\ &= 1, & \text{je-li } f(X_i; \theta_0) = 0, f(X_i; \theta_1) = 0, \\ &= -\infty & \text{je-li } f(X_i; \theta_0) \neq 0, f(X_i; \theta_1) = 0, \\ &= \infty, & \text{je-li } f(X_i; \theta_0) = 0, f(X_i; \theta_1) \neq 0. \end{aligned}$$

A dále

$$Q_n(\theta_0, \theta_1) = \sum_{i=1}^n Z_i(\theta_0, \theta_1).$$

Obecný Waldův sekvenční test

- náhodný výběr X_1, \dots, X_n z rozdělení s hustotou $f(x, \theta)$, $\theta \in \Theta$, kde $\Theta \subset \mathbb{R}$,
- testujeme $H_0 : \theta = \theta_0$ proti $H_1 : \theta = \theta_1$, $\theta_0 \neq \theta_1$,
- kritické nerovnosti

$$b < Q_n(\theta_0, \theta_1) < a, \quad n = 1, 2, \dots,$$

kde $-\infty < b < a < +\infty$,

- aproximujeme

$$a^* = \log \frac{1 - \beta}{\alpha}, \quad b^* = \log \frac{\beta}{1 - \alpha}.$$

Waldův test v $N(\mu, \sigma^2)$

- $\{X_i\}_{i=1}^{\infty}$ posloupnost iid náhodných veličin, $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$,
- testujeme

$$H_0 : \sigma^2 = \sigma_0^2 \quad \text{proti} \quad H_1 : \sigma^2 = \sigma_1^2, \quad 0 < \sigma_0^2 < \sigma_1^2 < \infty$$

Waldův test v $N(\mu, \sigma^2)$

μ je známé

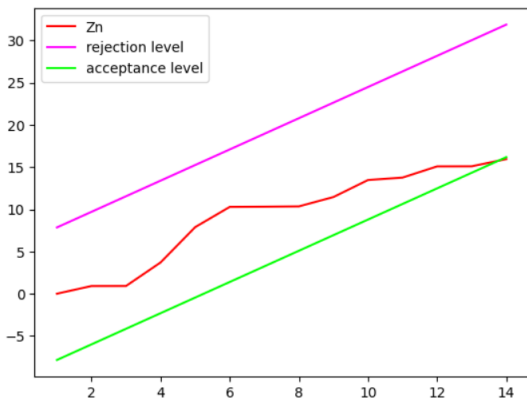
- kritická nerovnost testu má (po úpravě) tvar

$$h_b + ns < \sum_{i=1}^n (X_i - \mu)^2 < h_a + ns,$$

kde

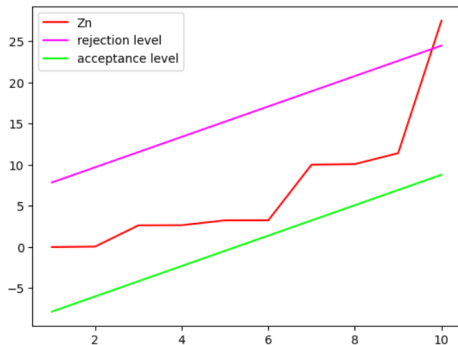
$$h_b = \frac{2b}{\sigma_0^{-2} - \sigma_1^{-2}}, \quad h_a = \frac{2a}{\sigma_0^{-2} - \sigma_1^{-2}}, \quad s = \frac{2 \log \frac{\sigma_1}{\sigma_0}}{\sigma_0^{-2} - \sigma_1^{-2}}.$$

Waldův test v $N(\mu, \sigma^2)$ - ilustrační průběh přijetí



Obrázek: $H_0 : \sigma^2 = 1$, $H_1 : \sigma^2 = 2$, skutečná hodnota $\sigma_X^2 = 1$.

Waldův test v $N(\mu, \sigma^2)$ - ilustrační průběh zamítnutí



Obrázek: $H_0 : \sigma^2 = 1$, $H_1 : \sigma^2 = 2$, skutečná hodnota $\sigma_X^2 = 2$.

Waldův test v $N(\mu, \sigma^2)$

μ je neznámé

- zavedeme nové náhodné veličiny

$$Y_k = \frac{\sum_{j=1}^k X_j - kX_{k+1}}{\sqrt{k(1+k)}}, \quad k = 1, 2, \dots;$$

- Y_1, Y_2, \dots iid, $Y_i \sim N(0, \sigma^2)$,
- $\sum_{i=1}^n Y_i^2 = \sum_{i=1}^{n+1} (X_i - \bar{X}_{n+1})^2$
- kritická nerovnost má nyní tvar

$$h_b + ns < \sum_{i=1}^n Y_i^2 < h_a + ns.$$

Waldova aproximace

- operační charakteristika

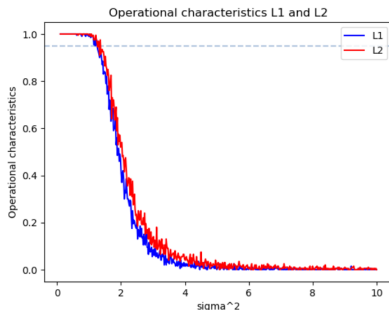
$$\hat{L}_S(\sigma^2) = \frac{1 - \exp\{h(\sigma^2)a\}}{\exp\{h(\sigma^2)b\} - \exp\{h(\sigma^2)a\}}, \quad E(Z_1; \sigma^2) \neq 0,$$

kde $h(\sigma^2)$ určíme jako nenulové řešení rovnice

$$E(\exp\{h(\sigma^2)Z_1\}; \sigma^2) = 1,$$

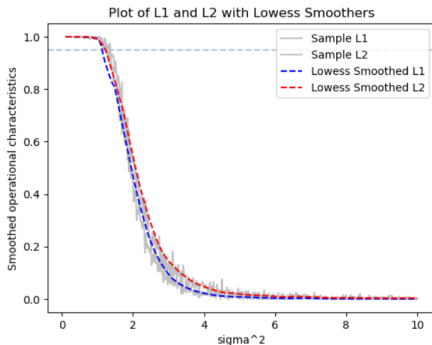
- dostaneme výraz $\sigma^2 = \frac{1 - \left(\frac{\sigma_0^2}{\sigma_1^2}\right)^{h(\sigma^2)}}{(\sigma_0^{-2} - \sigma_1^{-2})h(\sigma^2)}$.

Waldův test v $N(\mu, \sigma^2)$ - aproximace operační charakteristiky



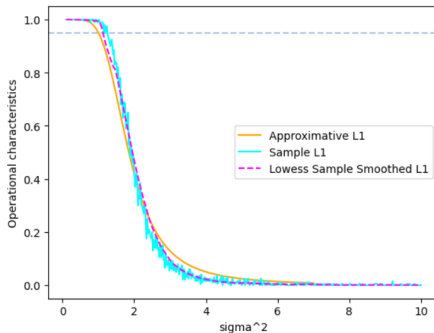
Obrázek: Operační charakteristika spočtená empiricky jako podíl přijatých hypotéz pro různé hodnoty σ^2 . L1 pro test se známým μ , L2 pro μ neznámé.

Waldův test v $N(\mu, \sigma^2)$ - aproximace operační charakteristiky



Obrázek: Operační charakteristika spočtená empiricky jako podíl přijatých hypotéz pro různé hodnoty σ^2 , vyhlazená lowess křivkou.

Waldův test v $N(\mu, \sigma^2)$ - aproximace operační charakteristiky



Obrázek: Srovnání empirické, vyhlazené a analyticky spočtené operační charakteristiky.

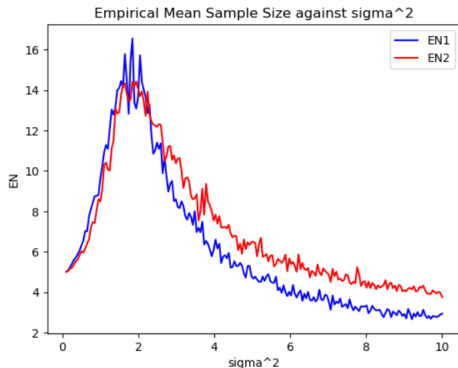
Waldova aproximace

- střední rozsah výběru

$$\hat{E}_S(N; \sigma^2) = \frac{\hat{L}_S(\sigma^2)b + (1 - \hat{L}_S(\sigma^2))a}{\frac{\sigma^2}{2}(\sigma_0^{-2} - \sigma_1^{-2}) \log \frac{\sigma_1}{\sigma_0}}, \quad E(Z_1; \sigma^2) \neq 0$$
$$= \frac{-ab}{2 \log^2 \frac{\sigma_1}{\sigma_0}}, \quad \text{jinak.}$$

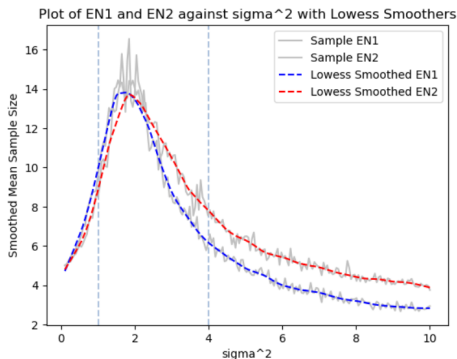
- $\sigma_*^2 = \frac{2 \log \frac{\sigma_1}{\sigma_0}}{\sigma_0^{-2} - \sigma_1^{-2}}$

Waldův test v $N(\mu, \sigma^2)$ - aproximace EN



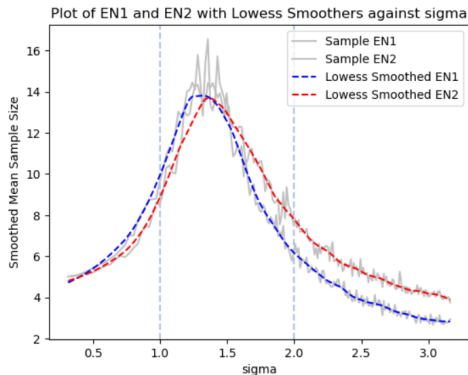
Obrázek: Empiricky spočtený střední rozsah výběru, průměrná velikost náhodného výběru pro různé hodnoty σ^2 .

Waldův test v $N(\mu, \sigma^2)$ - aproximace EN



Obrázek: Empiricky spočtený střední rozsah výběru vyhlazený lowess křivkou.

Waldův test v $N(\mu, \sigma^2)$ - aproximace EN



Obrázek: Empiricky spočtený střední rozsah výběru vyhlazený lowess křivkou jako funkce **směrodatné odchylky** σ^1 .

Sekvenční testy pro porovnávání parametrů dvou rozdělení

- $\{X_i\}_{i=1}^{\infty}$ a $\{Y_i\}_{i=1}^{\infty}$ nezávislé posloupnosti nezávislých náhodných veličin,
- X_i, Y_i mají hustotu exponenciálního (Darmois-Koopmanova) typu t.j.

$$f(x; \xi) = C(\xi) \exp\{T(x)D(\xi)\}h(x), \quad x \in \mathbb{R}, \quad \xi \in (\underline{\theta}, \bar{\theta}),$$

$$f(y; \eta) = C(\eta) \exp\{T(y)D(\eta)\}h(y), \quad y \in \mathbb{R}, \quad \eta \in (\underline{\theta}, \bar{\theta}).$$

- testujeme

$$H_0 : \xi < \eta \quad \text{proti} \quad H_1 : \xi > \eta,$$

Sekvenční testy pro porovnávání parametrů dvou rozdělení

- nesplněny požadavky testu,
- přecházíme k hypotézám H_0^* , H_1^* ,
- sestavíme

$$Q_n^* = \sum_{i=1}^n \log \frac{f(X_i, \theta_1)f(Y_i, \theta_0)}{f(X_i, \theta_0)f(Y_i, \theta_1)},$$

kde $\theta_0 = \min\{\xi, \eta\}$, $\theta_1 = \max\{\xi, \eta\}$.

Sekvenční testy pro porovnávání parametrů dvou rozdělení

- testujeme

$$H_0^* : D(\eta) - D(\xi) \geq \varepsilon \quad \text{proti} \quad H_1^* : D(\xi) - D(\eta) \geq \varepsilon,$$

kde $\varepsilon > 0$.

- položíme

$$D(\theta_1) - D(\theta_0) = \varepsilon.$$

- (Waldův test) kritické nerovnosti

$$b \leq \sum_{i=1}^n (T(X_i) - T(Y_i))\varepsilon \leq a.$$

Porovnávání parametrů v $\text{Alt}(p)$

- $\{X_i\}_{i=1}^{\infty}$ a $\{Y_i\}_{i=1}^{\infty}$ nezávislé posloupnosti,
- X_1, X_2, \dots iid, $X_i \sim \text{Alt}(p_1)$,
- Y_1, Y_2, \dots iid, $Y_i \sim \text{Alt}(p_2)$,
- testujeme

$$H_0 : p_1 < p_2 \quad \text{proti} \quad H_1 : p_1 > p_2, \quad p_1, p_2 \in (0, 1),$$

- interpretace úlohy

Porovnávání parametrů v Alt(p)

- sestavíme

$$Q_n^* = \sum_{i=1}^n (X_i - Y_i) \log \left(\frac{\theta_1(1 - \theta_0)}{\theta_0(1 - \theta_1)} \right),$$

- položíme $\varepsilon = \log \left(\frac{\theta_1(1 - \theta_0)}{\theta_0(1 - \theta_1)} \right)$,
- testujeme

$$H_0^* : \log \frac{p_2}{1 - p_2} - \log \frac{p_1}{1 - p_1} \geq \varepsilon, \text{ proti}$$

$$H_1^* : \log \frac{p_1}{1 - p_1} - \log \frac{p_2}{1 - p_2} \geq \varepsilon.$$

- kritické nerovnosti

$$b \leq \sum_{i=1}^n (X_i - Y_i) \varepsilon \leq a,$$

Porovnávání parametrů v Alt(p)

- N rozsah výběru
- přijmeme $H_0 \iff \sum_{i=1}^N (X_i - Y_i) = b^*$,
- přijmeme $H_1 \iff \sum_{i=1}^N (X_i - Y_i) = a^*$, kde

$$b^* = \left\lfloor \frac{b}{\varepsilon} \right\rfloor,$$

$$a^* = \frac{a}{\varepsilon} \quad \text{pro} \quad \frac{a}{\varepsilon} \text{ celé,}$$

$$a^* = \left\lfloor \frac{a}{\varepsilon} \right\rfloor + 1 \quad \text{jinak.}$$

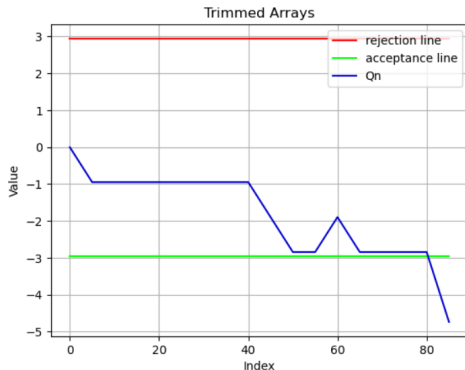
Porovnávání parametrů v Alt(p)

- Dostáváme

$$L(p_1, p_2) = \frac{\left(\frac{p_2(1-p_1)}{p_1(1-p_2)}\right)^{a^*} - 1}{\left(\frac{p_2(1-p_1)}{p_1(1-p_2)}\right)^{a^*} - \left(\frac{p_2(1-p_1)}{p_1(1-p_2)}\right)^{b^*}}, \quad p_1 \neq p_2,$$
$$= \frac{a^*}{a^* - b^*}, \quad p_1 = p_2.$$

$$E(N; p_1, p_2) = \frac{a^*(1 - L(p_1, p_2)) + b^*L(p_1, p_2)}{(p_2 - p_1)}, \quad p_1 \neq p_2,$$
$$= \frac{-a^*b^*}{2p_1(1 - p_1)}, \quad p_1 = p_2.$$

Porovnávání parametrů v $Alt(p)$ - ilustrační průběh



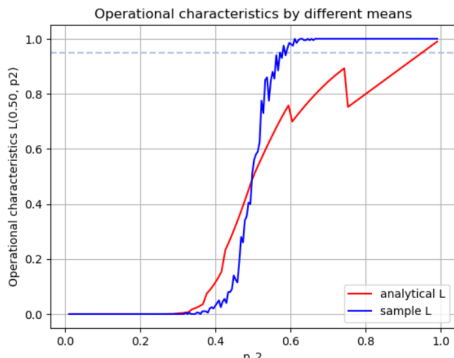
Obrázek: $H_0 : p_1 < p_2$, $H_1 : p_1 > p_2$, skutečné hodnoty parametrů jsou $p_1 = 0.95$, $p_2 = 0.98$. $\varepsilon \approx 0.947$, velikost kroku testu je 5.

Porovnávání parametrů v $Alt(p)$ - ilustrační průběh



Obrázek: $H_0 : p_1 < p_2$, $H_1 : p_1 > p_2$, skutečné hodnoty parametrů jsou $p_1 = 0.05$, $p_2 = 0.02$. $\varepsilon \approx 0.364$, velikost kroku testu je 5.

Porovnávání parametrů v Alt(p) - operační charakteristika



Obrázek: Operační charakteristika jako funkce p_2 pro $p_1 = 0.50$ počítaná analyticky a simulací.

Děkujeme za pozornost!