Příklady na procvičení z NMSA202

Poslední změna 30. července 2019

1 Klasická pravděpodobnost

1. Z kartiček s čísly $1, 2, 3, 4, 5$ náhodně vybereme tři a položíme je v pořadí, v němž jsme je vybrali. Jaká je pravděpodobnost, že vzniklé trojciferné číslo je sudé?
2. Ve sportce se sází 6 čísel, losuje se 6 ze 49. Spočtěte pravděpodobnost, že právě 4 čísla vsadíme správně.
3. Skupina 10 studentů, z nichž 3 jsou z MFF, se náhodně seřadí do fronty. Určete pravděpodobnost, že 3 studenti z MFF budou vedle sebe.
4. Uvažujme n různých dopisů a n různých obálek (již s nadepsanou adresou). Zmatená sekretářka umístí dopisy do obálek zcela náhodně.
   (a) Jaká je pravděpodobnost, že je alespoň jeden dopis ve správné obálce?
   (b) S jakou pravděpodobností není žádný dopis ve správné obálce? Spočtěte limitu této pravděpodobnosti pro $n \to \infty$.
5. Mějme skupinu n osob ($n > 6$) o kterých můžeme předpokládat, že se narodili nezávisle na sobě. Spočítejte pravděpodobnost, že
   (a) žádný z nich se nenarodil ve středu;
   (b) právě dva se narodili v pondělí a právě tři v sobotu;
   (c) existuje den v týdnu, ve kterém se nikdo z nich nenarodil.
6. V krabici je n černých a m bílých koulí. Které postupně náhodně vytahujeme ven (a již nevracíme zpět do krabice).
   (a) Jaká je pravděpodobnost, že v k-tém tahu jsme vytáhli bílou kouli?
   (b) Jaká je pravděpodobnost, že po K-tém tahu ($K < m + n$) bylo vytaženo právě k bílých koulí?
   (c) Jaká je pravděpodobnost, že prvních k vytažených koulí jsou všechny bílé ($k \leq m$).

2 Nezávislost, podmíněná pravděpodobnost, úplná pravděpodobnost, Bayesův vzorec

1. Třikrát po sobě hodíme mincí a zaznamenáme výsledek. Označme rub jako R a líc jako L. Rozhodněte, zda jsou jevy $A = \{RRR, LRR, RLL, LLL\}$, $B = \{RRL, RLR, LLR, LLL\}$ a $C = \{RRL, RLR, LRL, LLL\}$ nezávislé.
2. Rozhodněte o platnosti následujících tvrzení. Své rozhodnutí vždy řádně zdůvodněte (uveďte důkaz nebo protipříklad).
   (a) Jestliže jsou jevy A, B nezávislé, pak o nezávislosti jevů A^C, B^C obecně neumíme rozhodnout.
   (b) Jestliže $\mathsf{P}(A|B) \geq \mathsf{P}(A) > 0$, pak $\mathsf{P}(B|A) \geq \mathsf{P}(B)$.
   (c) Existují A, B neslučitelné jevy, tj. $A \cap B = \emptyset$, takové, že $\mathsf{P}(A) \neq 0$, $\mathsf{P}(B) \neq 0$ a A, B jsou nezávislé.
   (d) Jestliže platí $\mathsf{P}(A|B) = \mathsf{P}(A|B^C)$, pak jsou jevy A, B nezávislé.
   (e) Jestliže $\mathsf{P}(B) > 0$, pak $\mathsf{P}(A|B) \geq \mathsf{P}(A)$.

3. Roztržitý profesor zapomene v obchodě deštník s pravděpodobností 1/4. Cestou ze školy navštívil čtyři obchody a domů přišel bez deštníku. Jaká je pravděpodobnost, že deštník zapomněl ve čtvrtém obchodě?

4. Tři skupiny studentů řeší obtížný příklad. Ve skupině A jsou 3 velmi chytří studenti a každý z nich vyřeší příklad s pravděpodobností 0.8. Ve skupině B jsou 4 průměrní studenti a každý z nich vyřeší příklad s pravděpodobností 0.6. Ve skupině C jsou 2 slabí studenti a každý z nich vyřeší příklad s pravděpodobností pouze 0.4.
   (a) S jakou pravděpodobností náhodně vybraný student vyřeší příklad?
   (b) Náhodně vybraný student příklad nevyřešil. Ze které skupiny nejpravděpodobněji byl?
   (c) Studenti pracují nezávisle. S jakou pravděpodobností bude příklad vyřešen?

5. V krabici je 15 tenisových míčků, z toho 9 úplně nových. Pro první hru si náhodně vybereme 3 míčky a po skončení hry je vrátíme zpátky. Pro druhou hru vybereme opět 3 míčky. Určete pravděpodobnost toho, jsou že všechny 3 míčky použité v druhé hře nové.

6. Slovo „humor“ se v americké angličtině píše jako HUMOR a v britské angličtině jako HUMOUR. Na zahradní slavnosti byly 2/3 Američanů a 1/3 Britů. Náhodně vybraný člověk napsal slovo „humor“ (svým způsobem) a z tohoto slova bylo náhodně vybráno jedno písmeno. S jakou pravděpodobností byl daný člověk Brit, jestliže bylo vybráno písmeno "U"?

7. V truhle je neznámý počet mincí: jedna zlatá mince a náhodný počet stříbrných mincí, přičemž stříbrných mincí je právě k s pravděpodobností $\frac{e^{-1}}{k!}$ pro $k = 0, 1, \ldots$. Náhodně vylosujeme jednu minci a ta je zlatá. Jaké je pravděpodobnost, že v truhle bylo právě k stříbrných mincí za této dodatečné informace?

8. Ve sbírce 50 obrazů je 5 padělků. Jestliže je obraz falešný, znalec to pozná s pravděpodobností 80%. Je-li obraz originál, znalec ho mylně posoudí s pravděpodobností 5%. Určete
   (a) pravděpodobnost, že obraz je originál, jestliže byl znalcem označen za originál,
   (b) pravděpodobnost, že obraz je padělaný, jestliže byl znalcem označen za padělek.

9. Každý lékařský test je charakterizován svojí senzitivitou a specificitou, kde
   - senzitivita = pravděpodobnost pozitivního výsledku, je-li testovaná osoba nemocná,
   - specificita = pravděpodobnost negativního výsledku, je-li testovaná osoba zdravá.

   Pro test zjišťující přítomnost HIV viru v těle se uvádí senzitivita 99.9% a specificita 99.7%. Uvažujme hypotetickou populaci, ve které se vyskytuje 1% lidí s virem HIV.
   (a) Jaká je pravděpodobnost, že je osoba s pozitivním výsledkem testu skutečně HIV pozitivní?
   (b) Jaká je pravděpodobnost, že je osoba ve skutečnosti HIV pozitivní, dává-li test negativní výsledek?
   (c) U pozitivně testovaných jedinců se test provádí ještě jednou. Jaká je pravděpodobnost, že je člověk skutečně HIV pozitivní, byl-li i druhým testem označen za HIV pozitivního?

10. Na stole jsou dvě kostky — růžová a bledě zelená. Růžová kostka je pravidelná devítistěnná kostka, bledě zelená je pravidelná dvanáctistěnná kostka.
   (a) Náhodně vybereme kostku a hodíme. Jaká je pravděpodobnost, že padne šestka? Jaká je pravděpodobnost, že padne jedenáctka?
   (b) Padla jednička, jaká je pravděpodobnost, že jsme házeli růžovou kostkou?
   (c) Nyní předpokládejme, že děvčatům se více líbí růžová kostka, a tak si ji vyberou s pravděpodobností 4/5. Naopak, chlapci si vyberou bledě zelenou kostku s pravděpodobností 2/3.
      - Jaká je pravděpodobnost, že padne šestka, házel-li chlapec?

- Jaký je pravděpodobnost, že padne šestka, házela-li dívka?
- Jaká je pravděpodobnost, že padne šestka, házel-li náhodný student ze třídy, ve které je 10 chlapců a 5 dívek?

3 Náhodná veličina — diskrétní rozdělení

1. Nechť $(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P}) = ((0,1), \mathcal{B}(0,1), \lambda)$, kde λ je Lebesgueova míra. Náhodná veličina $X : \Omega \to \mathbb{R}$ je dána předpisem $X(\omega) = \lfloor 3\,\omega^2 \rfloor$ (tj. dolní celá část čísla $3\,\omega^2$)
   (a) Určete rozdělení X.
   (b) Určete pravděpodobnostní míru P_X.
2. Diskrétní náhodná veličina X nabývá pouze hodnot $1, 2, 3$ s pravděpodobnostmi $\mathsf{P}(X = k) = c \cdot k^2 \quad k = 1, 2, 3$. Spočítejte konstantu c, střední hodnotu $\mathsf{E}\,X$ a rozptyl $\mathsf{var}\,X$, distribuční funkci F a pravděpodobnost $\mathsf{P}(X \geq 2)$. Určete dále rozdělení veličiny $Y = (X-2)^2$ a $\mathsf{E}\,Y$.
3. Náhodná veličina X nabývá pouze hodnot $-1, 0, 1, 2$, a to s pravděpodobnosti $\mathsf{P}(X = -1) = \frac{1}{6}$, $\mathsf{P}(X = 0) = \frac{1}{2}$, $\mathsf{P}(X = 1) = \frac{1}{12}$ a $\mathsf{P}(X = 2) = a$. Určete konstantu a, tak aby se jednalo o pravděpodobnostní rozdělení. Spočítejte střední hodnotu $\mathsf{E}\,X$ a rozptyl $\mathsf{var}\,X$. Určete rozdělení veličiny $Y = X^2$ a spočítejte $\mathsf{E}\,Y$.
4. Basketbalista hází na koš, jeho pokusy jsou nezávislé a v každém z nich se trefí s pravděpodobností $p \in (0, 1)$. Rozhodl se, že skončí teprve až vhodí k košů. Označme X počet neúspěšných hodů předcházejících k-tému úspěchu (k-tému vhozenému koši). Určete rozdělení náhodné veličiny X.
5. Na stole leží N kostek, kde N je náhodná veličina s rozdělením $\mathsf{P}(N = 1) = 1/4$, $\mathsf{P}(N = 2) = 1/2$ a $\mathsf{P}(N = 3) = 1/4$. Hodíme všemi kostkami najednou. Jaký je očekávaný počet šestek?
6. Na stole leží N kostek, kde N je náhodná veličina s rozdělením $\mathsf{P}(N = i) = 1/6$, $i = 1, \dots, 6$.
   (a) Spočtěte střední hodnotu a rozptyl veličiny N.
   (b) Určete rozdělení N za podmínky, že součet čísel na všech kostkách dohromady je roven 5.
   (c) Určete rozdělení N za podmínky, že na kostkách padly právě 4 šestky.
7. Adam a Bedřich hrají následující hru. Každý hodí jednou (pravidelnou šestistěnnou) kostkou. Pokud je na obou kostkách součet pět, tak vyhrává Adam. Pokud je součet sedm, tak vyhrává Bedřich. Pokud není součet ani pět ani sedm, tak toto kolo skončilo nerozhodně a oba dva házejí znovu.
   (a) Určete pravděpodobnost, že Adam vyhraje v k-tém kole.
   (b) Určete pravděpodobnost, že Adam vyhraje.
   (c) Určete střední hodnotu počtu odehraných kol.
8. Dva hráči házejí postupně (pravidelnou šestistěnnou) kostkou. Začíná hráč A, který vyhraje, padne-li mu jednička (a pak již hra končí). Pokud hráči A nepadla jednička, hází hráč B, který vyhraje, pokud mu padne dvojka nebo trojka. Tím končí první kolo. Pokud v prvním kole nevyhrál ani hráč B, začíná se druhé kolo a hází opět hráč A, atd...
   (a) Určete pravděpodobnost, že hráč A vyhraje v k-tém kole.
   (b) Určete pravděpodobnost, že hráč A vyhraje.
   (c) Určete pravděpodobnost, že hráč B hodí právě k-krát.
   (d) Určete střední hodnotu počtu všech hodů.
9. Předpokládejme, že počet aut, která projedou mezi 7. a 8. hodinou pracovního dne pražskou ulicí 5. května se řídí Poissonovým rozdělením s parametrem $\lambda > 0$. Předpokládejme dále, že $p\,100\,\%$ $(0 < p < 1)$ řidičů překročí na měřeném úseku povolenou rychlost 50 km/h. Určete,

jakým rozdělením se řídí počet přestupků zaznamenaných měřičem rychlosti na pražské ulici 5. května mezi 7. a 8. hodinou pracovního dne.

4 Náhodná veličina — spojité rozdělení

1. Buď $(\Omega, \mathcal{F}, \mathsf{P}) = \big((0,1), \mathcal{B}(0,1), \lambda\big)$, kde λ je Lebesgueova míra. Náhodná veličina $X : \Omega \to \mathbb{R}$ je dána předpisem $X(\omega) = \sqrt{\omega}$.
   (a) Určete distribuční funkci F_X a pravděpodobnostní míru P_X.
   (b) Určete medián X.
2. Náhodná veličina X má rozdělení s hustotou
$$f(x) = \begin{cases} c\,e^x & \text{pro } x \in [0,1], \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$
   Určete konstantu c, distribuční funkci $F(x)$, střední hodnotu $\mathsf{E}\,X$ a rozptyl $\mathsf{var}\,(X)$.
3. V předchozím příkladu spočtěte medián náhodné veličin X a e^X.
4. Nechť $k > 1$ a uvažujme rozdělení s hustotou $f(x) = c/|x|$ pro $k < |x| < k+1$ a $f(x) = 0$ jinak. Spočtěte konstantu $c > 0$, $\mathsf{E}\,X$, $\mathsf{var}\,(X)$ a medián X.
5. Náhodná veličina X má rozdělení s hustotou $f(x) = 3x^2$ pro $0 < x < 1$ a $f(x) = 0$ jinak. Určete
   (a) Rozdělení veličiny $Y = X^3$.
   (b) Střední hodnotu a rozptyl veličiny $Z = \frac{1}{X}$.
6. Nechť má náhodná veličina X rovnoměrné rozdělení na intervalu $[0, \pi]$. Definujme veličiny $Y = X^2$ a $Z = \sin(X)$. Určete
   (a) rozdělení (hustotu) veličiny Y a její střední hodnotu,
   (b) rozdělení (hustotu) a střední hodnotu veličiny Z.
   (c) rozdělení náhodné veličiny $W = \max\{X, Y\}$.
7. Veličina X má rozdělení s hustotou
$$f(x) = \begin{cases} c \cdot \sin x & \text{pro } 0 < x < \pi, \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$
   (a) Určete konstantu $c > 0$ a distribuční funkci F (načrtněte).
   (b) Spočítejte střední hodnotu $\mathsf{E}\,X$.
   (c) Vyjádřete kvantilovou funkci F^{-1} a určete medián.
   (d) Jaké rozdělení má náhodná veličina $Y = 1 - \cos(X)$?
8. Mějme dán pravoúhlý trojúhelník s odvěsnami a, b a přeponou $c = 1$. Úhel mezi odvěsnou b a přeponou c je náhodná veličina s rovnoměrným rozdělením na intervalu $(0, \pi/2)$.
   (a) S jakou pravděpodobností je daný trojúhelník rovnoramenný?
   (b) Jaké je rozdělení úhlu, který svírá odvěsna a s přeponou c? S jakou pravděpodobností leží tento úhel v intervalu $(\pi/6, \pi/3)$?
   (c) Určete rozdělení délky odvěsny a. Načrtněte graf hustoty a distribuční funkce tohoto rozdělení. S jakou pravděpodobností je odvěsna a delší než $1/2$?
   (d) Spočtěte střední délku odvěsny a a její rozptyl.
   (e) Určete očekávaný obsah trojúhelníku.

5 Náhodné vektory

1. Házíme třikrát mincí. Označme X počet líců v prvních dvou hodech a Y počet rubů v posledních dvou hodech.
   (a) Určete sdružené rozdělení vektoru $(X, Y)^\top$.
   (b) Určete marginální rozdělení X a Y. Jsou náhodné veličiny X a Y nezávislé?
   (c) Určete jejich kovarianci a korelační koeficient.
2. Náhodný vektor $(X, Y)^\top$ má rozdělení s hustotou $f(x, y) = \begin{cases} cxye^{-(x^2+y^2)} & \text{pro } x \geq 0,\ y \geq 0, \\ 0 & \text{jinak}\ . \end{cases}$
   (a) Určete konstantu c tak, aby f byla hustota.
   (b) Spočtěte marginální hustoty f_X a f_Y veličin X a Y . Jsou veličiny X a Y nezávislé?
   (c) Spočtěte $\mathsf{E}\,(X^2 + Y^2)$.
3. Náhodný vektor $(X,\, Y)'$ má rovnoměrné rozdělení na jednotkovém kruhu, tj. jeho hustota je dána jako $f(x, y) = c$ pro $x^2 + y^2 \leq 1$ a $f(x, y) = 0$ jinak. Určete konstantu c a marginální rozdělení veličin X a Y. Rozhodněte, zda jsou veličiny X a Y nezávislé.
4. Nechť X a Y jsou nezávislé náhodné veličiny, přičemž X má rovnoměrné rozdělení na intervalu $[0, 1]$ a Y má rovnoměrné rozdělení na intervalu $[-1, 0]$. Označte si $W = X - Y$ a $Z = X + Y$.
   (a) Určete rozdělení, střední hodnotu a rozptyl náhodné veličiny Z.
   (b) Spočtěte $\mathsf{E}\,(ZW)$.
5. Náhodné veličiny X, Y jsou nezávislé s binomickým rozdělením $\mathsf{Bi}(n, p)$ a $\mathsf{Bi}(m, p)$. Jaké je rozdělení $X + Y$?
6. Nechť $(X, Y)^\top$ je náhodný vektor s hustotou $f(x, y) = c(x^2 + y^2)$ pro $0 < x < 1,\ 0 < y < 1$ a $f(x, y) = 0$ jinak.
   (a) Určete konstantu c.
   (b) Jsou veličiny X a Y nezávislé?
   (c) Spočtěte $\mathsf{P}(X > Y)$.
   (d) Spočtěte $\mathsf{E}\left(\frac{1}{X^2+Y^2}\right)$.
7. Nechť $X_1, \ldots, X_n$ jsou nezávislé stejně rozdělené náhodné veličiny s distribuční funkcí F a hustotou f. Označme $U = \max_{1 \leq i \leq n} X_i$ a $V = \min_{1 \leq i \leq n} X_i$.
   (a) Spočtěte distribuční funkci a hustotu veličiny U.
   (b) Spočtěte distribuční funkci a hustotu veličiny V.
   (c) Nechť F a f odpovídají rovnoměrnému rozdělení na intervalu $[0, 1]$. Spočtěte v tomto případě $\mathsf{E}\,U$, $\mathsf{var}\,(U)$, $\mathsf{E}\,V$ a $\mathsf{var}\,(V)$.
8. Nechť X a Y jsou nezávislé stejně rozdělené náhodné veličiny s rovnoměrným rozdělením $\mathsf{R}[0, 1]$. Nechť $D = \min\{X,\, Y\}$ a $H = \max\{X,\, Y\}$. Určete kovarianci $\mathsf{cov}\,(D,\, H)$. Jsou D a H nezávislé?
9. Předpokládejme, že doba čekání na autobus je náhodná veličina A s exponenciálním rozdělením se střední hodnotou $1/\mu$. Poté přestupujeme na vlak a doba čekání V na jeho příjezd má exponenciální rozdělení, tentokrát se střední hodnotou $1/\lambda$. Lze předpokládat, že A a V jsou nezávislé náhodné veličiny.
   (a) Určete rozdělení (distribuční funkci nebo hustotu) celkové doby čekání $A + V$.
   (b) Jaká je střední hodnota a rozptyl celkové doby čekání?
   (c) Zajímá nás, o kolik déle budeme čekat na vlak než na autobus. Určete proto střední Jaká

je pravděpodobnost, že budeme na vlak čekat o více než k minut déle než na autobus ($k \in \mathbb{R}$)? Jaká je pravděpodobnost, že budeme na vlak čekat právě o k minut déle než na autobus ($k \in \mathbb{R}$)?

(d) Jaká je pravděpodobnost, že budeme na vlak čekat více než k násobek doby čekání na autobus ($k > 0$)?

10. Buď $(\Omega, \mathcal{F}, \mathsf{P}) = \big((0,1), \mathcal{B}(0,1), \lambda\big)$, kde λ je Lebesgueova míra. Náhodná veličina $X : \Omega \to \mathbb{R}$ je dána předpisem $X(\omega) = \sqrt{\omega}$ a náhodná veličina $Y : \Omega \to \mathbb{R}$ je dána předpisem $Y(\omega) = \lfloor 3\omega^2 \rfloor$. Rozhodněte, zda jsou X a Y nezávislé.

6 Limitní věty

1. Nechť X_1, X_2, ... jsou nezávislé náhodné veličiny takové, že

$$\mathsf{P}(X_n = j) = \frac{1}{10} \quad \text{pro} \quad j \in \{0, 1, \dots, 9\},$$

pro všechna $n = 1, 2, \dots$.

(a) Jaká je pravděpodobnost, že jev $[X_n = 6]$ nastane jen pro konečně mnoho n?

(b) Rozhodněte, zda X_n/n konverguje k nule v pravděpodobnosti.

(c) Rozhodněte, zda X_n/n konverguje k nule skoro jistě.

(d) Rozhodněte, zda $Y_n = 1/(1 + X_n)^n$ konverguje v pravděpodobnosti k nule.

2. Nechť $X_1, X_2, \dots$ jsou nezávislé a stejně rozdělené náhodné veličiny s rovnoměrným rozdělením na intervalu $[0, 1]$. Definujme $Y_n = \min\{X_1, \dots, X_n\}$ a $Z_n = \max\{X_1, \dots, X_n\}$.

(a) Ukažte, že Y_n konverguje k nule v pravděpodobnosti.

(b) Rozhodněte, zda Y_n konverguje k nule skoro jistě.

(c) Rozhodněte, zda existuje konstanta $c \in \mathbb{R}$ taková, že $Z_n \xrightarrow{P} c$. Pokud ano, určete tuto konstantu.

(d) Určete, s jakou pravděpodobností nastane jev $[X_n < 1/n]$ pro nekonečně mnoho n.

(e) Rozhodněte, s jakou pravděpodobností nastane jev $[Z_n > 1-\varepsilon]$ pro všechna až na konečně mnoho n, kde $\varepsilon \in (0, 1)$.

3. Dokažte následující tvrzení: Nechť $\{X_n\}$ je posloupnost náhodných veličin taková, že $\mathsf{E}\, X_n \to a \in \mathbb{R}$ a $\mathsf{var}\, X_n \to 0$ pro $n \to \infty$. Pak $X_n \xrightarrow{P} a$.

4. Nechť X_n jsou nezávislé náhodné veličiny a nechť X_n má alternativní rozdělení $\mathsf{Alt}(1/n)$, tj. $\mathsf{P}(X_n = 1) = 1/n$ a $\mathsf{P}(X_n = 0) = 1 - 1/n$.

(a) Ukažte, že $X_n \xrightarrow{P} 0$, ale neplatí $X_n \xrightarrow{s.j.} 0$.

(b) Vyšetřete konvergenci v pravděpodobnosti $\{Y_n\}$, kde $Y_n = nX_n$.

5. Nechť X_n má exponenciální rozdělení se střední hodnotou $1/n$. Ukažte, že $X_n \xrightarrow{P} 0$.

6. Nechť X_n jsou nezávislé a stejně rozdělené náhodné veličiny. Ukažte, že

(a) je-li $\mathsf{E}\,|X_1| = \infty$, pak s pravděpodobností jedna nastane nekonečně mnoho jevů $[|X_n| \geq n]$.

(b) je-li $\mathsf{E}\,|X_1| < \infty$, pak s pravděpodobností jedna nastane nejvýše konečně mnoho jevů $[|X_n| \geq n]$.

7. Nechť $X_1, X_2, \dots$ je posloupnost nezávislých stejně rozdělených náhodných veličin s hustotou

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & x \in (-1, 1), \\ 0, & \text{jinde}. \end{cases}$$

Určete pravděpodobnost, že

(a) nekonečně krát nastane jev $A_i = [|X_i| < \frac{1}{i^2}]$,

(b) nekonečně krát nastane jev $A_i = [|X_1| < \frac{1}{i^2}]$,

(c) nekonečně krát nastane jev $A_i = [|X_i| < \frac{1}{i}]$,

(d) nekonečně krát nastane jev $A_i = [|X_1| < \frac{1}{i}]$.

8. Nechť $\{X_k\}_{k=1}^{\infty}$ jsou nezávislé náhodné veličiny, kde X_k, $k = 1, 2, \dots$, má hustotu

$$f(x) = \frac{1}{2}\, k^{-\lambda} \exp\Big\{-k^{-\lambda}|x|\Big\} \qquad \text{pro } x \in \mathbb{R},$$

kde λ je nějaký parametr.

(a) Dokažte, že $\overline{X}_n = n^{-1}\sum_{k=1}^{n} X_k$ konverguje k 0 skoro jistě pro $\lambda < 1/2$.

(b) Dokažte, že X_k konverguje v pravděpodobnosti k nule pro $k \to \infty$ pro $\lambda < 0$.

9. Nechť má veličina X hustotu $f(x) = \dfrac{x^m}{m!}\, e^{-x}$ pro $x \geq 0$ a $f(x) = 0$ jinak, kde $m \in \mathbb{N}$.

(a) Spočítejte $\mathsf{E}\, X$ a $\mathsf{var}\,(X)$.

(b) Pomocí Čebyševovy nerovnosti ukažte, že platí

$$\mathrm{P}\Big(0 < X < 2(m+1)\Big) > \frac{m}{m+1}.$$

10. V Dolní Lhotě se koná výstava dojnic na kterou se sjede 10 000 lidí z širokého okolí. Každý návštěvník výstavy si potřebuje v jediném bankomatu, který je v Dolní Lhotě k dispozici, vybrat hotovost. V bankomatu se nacházejí pouze tisícikorunové bankovky. Konkrétní osoba vybere nezávisle na ostatních K tisícikorun. Předpokládejme, že K je náhodnou veličinou, jenž se řídí Poissonovým rozdělením s parametrem $\lambda = 1$. Kolik musí být před začátkem výstavy v bankomatu tisícikorun, aby s pravděpodobností alespoň 0,99 nedošlo k celkovému vybrání bankomatu během výstavy?

11. Hodíme stokrát šestistěnnou hrací kostkou. Určete přibližnou hodnotu pravděpodobnosti, s jakou výsledný součet leží v rozmezí od 320 do 380 (včetně)?

12. Pořádáte svatební hostinu a objednali jste 200 zákusků. Ze zkušenosti víte, že počet zákusků, který sní náhodný host, se řídí Poissonovým rozdělením se střední hodnotou 4. Kolik může nejvýše dorazit hostů na hostinu, aby se s pravděpodobností alespoň 0.9 nemusel žádný z hostů v jídle omezovat (tj. aby mohl sníst tolik zákusků, kolik jen chce)?

13. Počet studentů, kteří během konzultačních hodin v jednom týdnu navštíví profesora A, je roven k s pravděpodobností $1/5$ pro $k = 1, \dots, 5$. Zjistěte, s jakou pravděpodobností bude profesor A během akademického roku (40 týdnů) konzultovat s nejvýše 100 studenty. Při řešení příkladu předpokládejte, že počty konzultacechtivých studentů v jednotlivých týdnech jsou vzájemně nezávislé.

14. Pojišťovna pojišťuje 10 000 řidičů stejného typu automobilu. Každý řidič zaplatí na začátku roku 10 tisíc Kč ročního pojistného. S pravděpodobností 0,9 řidič během roku nezpůsobí nehodu (a pojišťovna nic nevyplácí). S pravděpodobností 0,09 způsobí řidič drobnou nehodu, při které bude pojišťovna vyplácet 50 tisíc Kč. Konečně s pravděpodobností 0,01 způsobí řidič větší nehodu, což bude pro pojišťovnu znamenat plnění ve výši 450 tisíc Kč.

(a) S jakou pravděpodobností pojišťovna vydělá více než 5 milionů Kč?

(b) Na jaký minimální zisk se může ředitel pojišťovny těšit na konci roku s pravděpodobností 0,95?

(c) Kolik řidičů by musela pojišťovna pojišťovat, aby pravděpodobnost toho, že nebude ve ztrátě, byla alespoň 0,999?

15. Pravděpodobnost zásahu terče je při každém ze 700 výstřelů 0.4. Jaká je pravděpodobnost toho, že odchylka relativní četnosti zásahů od uvedené pravděpodobnosti nepřesáhne 0.05?

7 Bodový odhad

1. Nechť $X_1, X_2, \dots$ jsou nezávislé náhodné veličiny s rovnoměrným rozdělením na intervalu $[0, a]$, kde $a > 0$ je neznámý parametr. Uvažujme veličiny $U_n = \max_{1 \le i \le n} X_i$ a $T_n = 2\overline{X}_n$.
   (a) Ukažte, že U_n je maximálně věrohodný odhad parametru a.
   (b) Ukažte, že U_n konverguje k a v pravděpodobnosti.
   Návod: Odvoďte distribuční funkci náhodné veličiny U_n a ukažte, že pravděpodobnost $\mathsf{P}(|U_n - a| \ge \varepsilon)$ konverguje k nule.
   (c) Ukažte, že U_n konverguje k a skoro jistě.
   (d) Jak musíme U_n „modifikovat“ (přenásobit vhodnou konstantou), abychom dostali nestranný odhad V_n parametru a? Je tento odhad V_n konzistentní?
   (e) Ukažte, že T_n je momentový odhad parameteru a. Rozhodněte, zda je T_n nestranný a konzistentní odhad parametru a.
   (f) Porovnejte rozptyl odhadů T_n a V_n.
   (g) Na základě všech svých zjištění rozhodněte, který odhad parametru a vám připadá „nejlepší“.

2. Buďte $X_1, \dots, X_n$ nezávislé náhodné veličiny s logaritmicko-normálním rozdělením s hustotou

$$f(x; \mu) = \begin{cases} \frac{1}{x\sqrt{2\pi}} \exp\Big\{-\frac{(\log x - \mu)^2}{2}\Big\}, & x > 0, \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$

   (a) Najděte maximálně věrohodný odhad parametru μ a vyšetřete jeho nestrannost a konzistenci.
   (b) Najděte momentový odhad parametru μ a vyšetřete jeho konzistenci.

3. Uvažujte situaci jako v předchozím příkladě. Je zde výběrový průměr $\bar{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i$ nestranný a konzistentní odhad parametru μ?

4. Mějme náhodný výběr o rozsahu n z normálního rozdělení $\mathrm{N}(\mu_0, \sigma^2)$, kde $\mu_0 \in \mathbb{R}$ je známá hodnota a $\sigma^2 > 0$ neznámý parametr. Nalezněte metodou maximální věrohodnosti odhad parametru σ^2. Vyšetřete nestrannost a konzistenci.

5. Uvažujte situaci jako v předchozím příkladě. Je výběrový rozptyl $S_n^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X}_n)^2$ nestranný a konzistentní odhad parametru σ^2?

6. Nechť $X_1, \dots, X_n$ jsou nezávislé náhodné veličiny s alternativním rozdělením, tj.

$$\mathsf{P}(X_i = x) = p^x(1-p)^{1-x}, \quad x \in \{0, 1\},$$

   kde $p \in (0, 1)$ je neznámý parametr.
   (a) Najděte maximálně věrohodný a momentový odhad parametru p.
   (b) Je $\widehat{p}_n = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^n X_i^2$ konzistentní a nestranný odhad parametru p?
   (c) Je $\widetilde{p}_n = X_1 - X_2 + X_3$ konzistentní a nestranný odhad parametru p?

7. Uvažujte situaci jak v předchozím příkladě. Vyšetřete, zda $\bar{X}_n(1 - \bar{X}_n)$ je nestranný a konzistentní odhad parametrické funkce $p(1-p)$.

8. Buďte $X_1, \dots, X_n$ náhodný výběr z hustoty

$$f(x; \theta) = \frac{2\theta^2}{x^3}\,\mathbb{I}\{x > \theta\}, \qquad \theta > 0.$$

(a) Najděte maximálně věrohodný odhad parametru θ a vyšetřete jeho nestrannost a konzistenci.
(b) Najděte momentový odhad parametru θ a vyšetřete jeho nestrannost a konzistenci.

9. Nechť $X_1, \dots, X_n$ jsou nezávislé stejně rozdělené náhodné veličiny takové, že

$$\mathsf{P}(X_i = k) = \frac{e^{-1/\theta}}{\theta^k\, k!} \qquad k = 0, 1, 2, \dots,$$

kde $\theta > 0$ je neznámý parametr. Najděte maximálně věrohodný odhad parametru θ a vyšetřete jeho nestrannost a konzistenci.

8 Intervalový odhad

1. Předpokládáme, že výška chlapců ve věku 9,5 až 10 let má normální rozdělení $N(\mu, \sigma^2)$ s neznámou střední hodnotou μ a známým rozptylem $\sigma^2 = 39{,}112$. Změřili jsme výšku $n = 15$ chlapců a vypočítali výběrový průměr $\bar{X} = 139{,}13$.
   (a) Určete oboustranný intervalový odhad o spolehlivosti 99% pro neznámý parametr μ.
   (b) Určete dolní intervalový odhad o spolehlivosti 99% pro neznámý parametr μ.
   (c) Určete horní intervalový odhad o spolehlivosti 99% pro neznámý parametr μ.

2. Mějme náhodný výběr $X_1, \dots, X_{12}$ z normálního rozdělení $N(\mu, \sigma^2)$ s neznámou střední hodnotou μ a neznámým rozptylem σ^2. Vypočítali jsme výběrový průměr a výběrový rozptyl

$$\bar{X} = 14{,}306, \quad S_n^2 = 0{,}327.$$

   (a) Najděte oboustranný intervalový odhad o spolehlivosti 95% pro střední hodnotu μ.
   (b) Najděte oboustranný intervalový odhad o spolehlivosti 95% pro rozptyl σ^2.

3. Průzkum veřejného mínění měl za úkol zjistit názor občanů ČR na výstavbu amerického radaru. Do studie bylo zahrnuto $n = 400$ občanů, z nichž 240 vyjádřilo souhlas s výstavbou.
   (a) Odhadněte bodově podíl občanů ČR, kteří souhlasí s výstavbou radaru. Jaký model používáte? Jaké jsou teoretické vlastnosti, rozdělení a asymptotické rozdělení tohoto bodového odhadu?
   (b) Určete intervalový odhad o asymptotické spolehlivosti 95% pro podíl občanů, kteří souhlasí s radarem.
   (c) Jaký by musel být rozsah výběru n, aby intervalový odhad s asymptotickou spolehlivostí 95% pro tento podíl měl šířku nejvýše 0,03 (uvažujeme-li, že podíl občanů zahrnutých ve studii, kteří souhlasí, se nezmění).

4. Chceme porovnat průměrnou výšku dvacetiletých chlapců a dívek. Studie se zúčastnilo 25 chlapců (veličiny $X_1, \dots, X_{25}$) a 20 dívek (veličiny $Y_1, \dots, Y_{20}$). Obdrželi jsme následující výsledky:

$$\bar{X} = 180{,}6, \quad \bar{Y} = 164{,}9, \quad S_X^2 = 6{,}5, \quad S_Y^2 = 9{,}3.$$

Lze předpokládat, že výška chlapců i dívek má normální rozdělení se stejným rozptylem σ^2. Sestrojte intervalový odhad pro rozdíl průměrné výšky o spolehlivosti 95 %.

5. Lze předpokládat, že počet dopravních nehod na ulici Sokolovská se řídí Poissonovým rozdělením s parametrem $\lambda > 0$ a že počty nehod v jednotlivých dnech jsou nezávislé a stejně rozdělené náhodné veličiny. Zjistili jsme, že za 30 dní se stalo 62 nehod.

(a) Zkonstruujte intervalový odhad se spolehlivostí 95% pro střední počet nehod za jeden den.
(b) Zkonstruujte 95%-ní intervalový odhad pro pravděpodobnost, že v daný den nenastane žádná nehoda.
(c) Zkonstruujte 95%-ní intervalový odhad pro pravděpodobnost, že v daný den nastane více než 10 nehod.

6. Vaše dítě má oblíbenou hračku na knoflíkovou baterii. Zjistili jste, že od koupení hračky uběhlo teprve 190 dní, ale již dáváte dítěti do hračky 20 baterii (přičemž při zakoupení nebyla v hračce žádná baterie). Předpokládejte, že doba životnosti baterie má exponenciální rozdělení.
   (a) Sestavte bodový a intervalový odhad (se spolehlivostí 90%) pro střední dobu životnosti baterie ve hračce.
   (b) Bodově a intervalově (se spolehlivostí 90%) odhadněte medián životnosti baterie.