Vzorová zápočtová písemka – varianta A

1. **(6 bodů)** Automatická tiskařská řezačka odstřihává z role papíru přibližně 30 cm kusy (beze zbytku a nezávislé na sobě). Přesná délka jednoho odstřiženého kusu (v centimetrech) je náhodná veličina X, kde $X = 30 + \varepsilon$ a ε má rovnoměrné rozdělení na intervalu $(-2, 2)$, tedy platí $\varepsilon \sim \mathsf{R}(-2, 2)$ (v centimetrech).
   (a) Kolik kusů papíru se nám podaří z 200 metrové role odstřihnout s pravděpodobností 95%?
   (b) Ze 100 odstřižených kusů papírů jsme spočetli průměrnou délku jednoho kusu. S jakou pravděpodobností bude výsledná hodnota ležet v intervalu $(29.5, 30.5)$?

2. **(9 bodů)** Nechť $\{Z_n\}_{n=1}^{\infty}$ je posloupnost nezávislých náhodných veličin, kde Z_n má hustotu
$$g_n(z) = \begin{cases} n\, e^{-n\, z}, & z \geq 0, \\ 0, & z < 0. \end{cases}$$
   (a) Určete $\mathsf{E}\, Z_n$ a $\mathsf{var}\,(Z_n)$.
   (b) Rozhodněte, zda $\{Z_n\}_{n=1}^{\infty}$ konverguje k nule v pravděpodobnosti.
   (c) Definujme $X_n = \sqrt{n} Z_n$. Konverguje $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ k nule v pravděpodobnosti?
   (d) Ověřte, že posloupnost $\{Z_n\}_{n=1}^{\infty}$ splňuje silný zákon velkých čísel. Co nejvíce explicitně zformulujte, co nám v tomto případě silný zákon velkých čísel dává.
   (e) Spočtěte pravděpodobnost, že až na konečně mnoho $n \in \mathbb{N}$ nastane jev $A_n = [Z_1 > \frac{1}{n}]$.

Vzorová zápočtová písemka – varianta B

1. **(8 bodů)** Nechť $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ je posloupnost nezávislých stejně rozdělených náhodných veličin, kde každá z veličin má hustotu
$$f(x) = \begin{cases} 2\, x, & x \in (0, 1), \\ 0, & \text{jinak}. \end{cases}$$
   Pro $n \in \mathbb{N}$ definujme $Y_n = n\, X_n$ a $Z_n = (X_n)^n$.
   (a) Určete $\mathsf{E}\, Y_n$ a $\mathsf{var}\,(Y_n)$.
   (b) Ověřte, že posloupnost $\{Y_n\}_{n=1}^{\infty}$ splňuje silný zákon velkých čísel. Co nejvíce explicitně zformulujte, co nám v tomto případě silný zákon velkých čísel dává.
   (c) Spočtěte pravděpodobnost, že nekonečněkrát nastane jev $[Y_n < 1]$.
   (d) Definujte $W_n = \max_{1 \leq i \leq n} Z_i$. Rozhodněte, zda W_n konverguje k jedničce v pravděpodobnosti.

2. **(7 bodů)** Naděžda má velmi ráda mentolové bonbóny. Denně sní k bonbónů s pravděpodobností $1/5$ pro $k = 2, 3, 4, 5, 6$. Lze předpokládat, že počty bonbónů snědené v jednotlivých dnech jsou nezávislé náhodné veličiny.
   (a) Naděžda si s sebou na prázdniny vzala 100 bonbónů. Na kolik dní jí tato zásoba vystačí s pravděpodobností 99%?
   (b) Odhadněte pomocí Čebyševovy nerovnosti, s jakou pravděpodobností bude absolutní odchylka průměrného počet bonbónů, které Naděžda sní během 30 dní, od čísla 4 větší než 0.5.