

Vzorová zápočtová písemka – varianta A

1. (8 bodů) Nechť X_1, \dots, X_n je náhodný výběr z rozdělení, které je dáno hustotou

$$f(x; \theta) = \begin{cases} \frac{2x}{\theta^2}, & x \in [0, \theta], \\ 0 & \text{jinak,} \end{cases}$$

kde $\theta > 0$ je neznámý parametr.

- (a) Naleznete odhad parametru θ metodou maximální věrohodnosti.
(b) Modifikujte maximálně věrohodný odhad z (a), aby byl nestranný.
(c) Navrhněte odhad pravděpodobnosti $P(X \in (0, \frac{\theta}{2}))$.
2. (7 bodů) Každý stírací los vyhraje s (neznámou) pravděpodobností p . Podařilo se nám přesvědčit deset svých kamarádů, aby si každý z nich kupoval losy tak dlouho, dokud nenarazí na výherní los. Na konci tohoto experimentu se ukázalo, že kamarádi koupili celkem 95 losů.
- (a) Sestavte intervalový odhad o spolehlivosti 0.9 pro střední počet losů, který musí člověk koupit, než narazí na výherní los.
(b) Sestavte intervalový odhad o spolehlivosti 0.9 pro parametr p .

Lze využít toho, že pro diskrétní náhodnou veličinu X s tzv. geometrickým rozdělením daným předpisem

$$P(X = k) = p(1 - p)^k, \quad k = 0, 1, 2, \dots,$$

platí, že $EX = \frac{1-p}{p}$ a $\text{var } X = \frac{1-p}{p^2}$.

Vzorová zápočtová písemka – varianta B

1. (9 bodů) Nechť X_1, \dots, X_n jsou nezávislé stejně rozdělené diskrétní náhodné veličiny takové, že

$$P(X_i = x) = p^{x/9}(1 - p)^{1-x/9}, \quad x \in \{0, 9\},$$

kde $p \in (0, 1)$ je neznámý parametr. Definujme odhad $\tilde{p}_n = \frac{1}{3n-1} \sum_{i=1}^n \sqrt{X_i}$.

- (a) Je odhad \tilde{p}_n konzistentním odhadem parametru p ?
(b) Je odhad \tilde{p}_n nestranným odhadem parametru p ?
(c) Najděte maximálně věrohodný odhad parametru p . Je tento odhad totožný s momentovým odhadem?
2. (6 bodů) Do babyboxů (schránek na odkládání miminek) bylo (ke dni 11. 5. 2019) v ČR odloženo celkem 188 dětí, z toho 106 holčiček a 82 chlapečků.
- (a) Sestavte vhodný intervalový odhad se spolehlivostí $\alpha = 0,95$ pro pravděpodobnost, že odložené miminko je holčička. Dá se na základě tohoto odhadu tvrdit, že miminka určitého pohlaví jsou odkládána více?
(b) Sestavte vhodný intervalový odhad se spolehlivostí $\alpha = 0,95$ pro pravděpodobnost, že mezi třemi odloženými miminky nebude ani jeden chlapec.

Nezapomeňte uvést všechny předpoklady, které pro řešení využíváte.