

## Zápočtová písemka z NMSA332 Varianta V - 20XX

### Příklad 1 (15 bodů)

Mějme náhodný výběr  $X_1, \dots, X_n$  z rozdělení

$$f_X(x) = \begin{cases} 2\eta x e^{-\eta x^2}, & x \in (0, \infty), \\ 0, & \text{jinak,} \end{cases}$$

kde  $\eta > 0$  je neznámý parametr.

- (i) Najděte maximálně věrohodný odhad parametru  $\eta$  a odvoďte jeho asymptotické rozdělení.
- (ii) Sestavte Raoův skórový test a test poměrem věrohodnosti (určete kritický obor) nulové hypotézy  $H_0 : \eta = \eta_0$  proti alternativě  $H_1 : \eta \neq \eta_0$ . Jak by se počítala p-hodnota těchto testů?

### Příklad 2 (8 bodů)

Mějme náhodný výběr  $X_1, \dots, X_n$  z diskrétního rovnoměrného rozdělení, tj.

$$P(X_1 = 2i) = \frac{1}{M}, \quad i = 1, \dots, M,$$

kde  $M \in \mathbb{N}$  je neznámý parametr.

- (i) Najděte maximálně věrohodný odhad parametru  $M$ .
- (ii) Vyšetřete konzistenci maximálně věrohodného odhadu.

### Příklad 3 (27 bodů)

Uvažujte nezávislé náhodné vektory  $(X_1, Z_1)^\top, \dots, (X_n, Z_n)^\top$  takové, že  $Z_i|X_i$  má Poissonovo rozdělení  $\text{Po}(\lambda(X_i))$ , kde  $\lambda(X_i) = \gamma_1 (X_i)^{\gamma_2}$  a  $\gamma_1, \gamma_2 \in \mathbb{R}$  jsou neznámé parametry. Dále necht'  $X_i$  má rozdělení, které nezávisí na parametrech  $\gamma_1$  a  $\gamma_2$ .

- (i) Najděte maximálně věrohodný odhad vektorového parametru  $(\gamma_1, \gamma_2)^\top$  a určete jeho asymptotické rozdělení.
- (ii) Sestavte (nějaký) test pro nulovou hypotézu  $H_0 : (\gamma_1, \gamma_2)^\top = (1, 0)^\top$  proti alternativě  $H_1 : (\gamma_1, \gamma_2)^\top \neq (1, 0)^\top$ .
- (iii) Sestavte Raoův skórový test pro nulovou hypotézu  $H_0 : \gamma_2 = 0$  proti alternativě  $H_1 : \gamma_2 \neq 0$  (tj. parametr  $\gamma_1$  je rušivý).
- (iv) Sestavte horní intervalový odhad parametru  $\gamma_1$  o (asymptotické) spolehlivosti  $1 - \alpha$ .