UNIVERZITA KARLOVA V PRAZE

Fakulta matematicko-fyzikální

Sekvenční analýza

RNDr. Marie Hušková, CSc.

Státní pedagogické nakladatelství

Praha

O B S A H

Str.

Předmluva

Sekvenční analýza je metoda řešení statistických úloh. Vycházíme při ní ze sekvenčně uspořádaného experimentu, tj. z posloupnosti dílčích experimentů, jejichž délka není předem stanovena; dílčí experimenty se konají jeden za druhým a po každém či několika se rozhoduje, zda budeme dělat další dílčí experiment nebo zda serii pokusů ukončíme a k vyřešení úlohy použijeme informací obsažených v dílčích experimentech dosud uskutečněných. Při nesekvenční analýze vycházíme z experimentu, u něhož počet opakování dílčích experimentů je předem určen (této metodě je věnována většina knih o matematické statistice). Pro některé statistické úlohy existují řešení na základě obou metod, u některých jen na základě sekvenční metody.

Použití sekvenční analýzy je výhodné zejména tam, kde se dílčí experimenty dělají postupně za sebou (klinická vyšetření, kontrola jakosti výrobků atd.). Sekvenční analýza vede ke snížení nákladů na experiment (střední počet opakování dílčích experimentů je menší) ve srovnání s nesekvenční analýzou. Nevýhodou sekvenční analýzy je, že neznáme předem rozsah výběru a v průběhu experimentu musíme činit částečná rozhodnutí, zda ukončit experiment nebo v něm pokračovat.

Účelem skript je vyložit základy sekvenční analýzy jak v úlohách testování hypotéz, tak teorie odhadu. Skriptum je rozděleno do šesti kapitol . První kapitola je věnována studiu obecného sekvenčního testu, druhá studiu Waldova sekvenčního testu. Ve třetí kapitole jsou vyloženy metody konstrukce sekvenčních testů pro složené hypotézy, čtvrtá kapitola obsahuje sekvenční analogie některých klasických testů. V páté kapitole jsou vysvětleny základy sekvenční teorie odhadu. Poslední kapitola obsahuje některá tvrzení z teorie pravděpodobnosti, která hrají důležitou roli v sekvenční analýze a která nejsou obsažena v běžných učebnicích pravděpodobnosti.

Skriptum bylo napsáno jako pomůcka ke stejnojmenné přednášce pro posluchače zaměření matematická statistika, ale může posloužit i širšímu okruhu čtenářů, neboť pokud je mi známo, nebyla dosud v českém jazyce publikována knižka, týkající se sekvenční analýzy. Předpokládá se, že čtenář je seznámen se základy vyšší matematiky a matematické statistiky na úrovni knihy J.Anděl: Matematická statistika, kap.1-10, 13-15. Značení je převzato z této knihy.

Závěrem bych chtěla poděkovat dr.Vorlíčkové,CSc. za podnětné připomínky, doc.Štěpánovi,CSc. za poskytnutí materiálu pro napsání poslední kapitoly, oběma recenzentům a všem,kteří se podíleli na zkvalitnění rukopisu a paní Kršňákové za jeho pečlivé přepsání.

1. Sekvenční testování hypotéz

1.1 Úvod (Waldův test)

Pro objasnění rozdílu mezi sekvenční a nesekvenční analýzou si uvedeme řešení klasické statistické úlohy na základě obou přístupů.

Uvažujme úlohu testování hypotézy H_0 : "náhodná veličina X má rozdělení s hustotou $f_0(x)$" proti alternativní hypotéze H_1 : "náhodná veličina X má rozdělení s hustotou $f_1(x)$", kde $f_0(x)$ a $f_1(x)$ jsou hustoty vzhledem k σ - konečné míře μ .

Připomeňme, že zamítneme-li H_0 (tj.přijmeme-li H_1) ačkoli je správná, dopouštíme se tzv. chyby 1.druhu a přijmeme-li H_0 (tj. zamítneme-li H_1), ačkoli H_1 je správná, dopustíme se chyby 2.druhu. Obvykle budeme označovat pravděpodobnosti chyb 1. a 2.druhu α resp. β ,tj.

(1.1) $$P(\text{zam.}H_0/H_0 \text{ platí}) = \alpha ,$$

(1.2) $$P(\text{zam.}H_1/H_1 \text{ platí}) = \beta .$$

Při klasickém nesekvenčním přístupu experimentátor zvolí rozsah výběru n a pravděpodobnost chyby 1.druhu a na základě náhodného výběru $X_1,\dots,X_n$ provede test. Použijeme většinou nejsilnější test (vyplývající z Neyman-Pearsonova lemmatu) tj.

(1.3) přijmeme H_1, jestliže $\prod_{i=1}^{n} \frac{f_1(X_i)}{f_0(X_i)} \geq c$;

(1.4) přijmeme H_0, jestliže $\prod_{i=1}^{n} \frac{f_1(X_i)}{f_0(X_i)} < c$.

kde číslo c je stanoveno tak, aby pravděpodobnost chyby 1.druhu byla nejvýše rovna zvolenému číslu α, zvanému hladina významnosti. Někdy též experimentátor předepisuje pravděpodobnosti 1. a 2.druhu a pak číslo c a rozsah výběru n stanoví v závislosti na pravděpodobnostech chybných rozhodnutí, což je často spojeno s výpočetními problémy.

A.Wald navrhl pro uvažovanou úlohu následující sekvenční postup. Zvolíme pravděpodobnosti chyb (označme je α resp.β, $\alpha + \beta < 1$). Děláme postupně náhodný výběr $X_1, X_2, \dots$. Na základě náhodného výběru $X_1, \dots, X_n$ přijmeme H_0, jestliže

$\prod_{i=1}^{n} \frac{f_1(X_i)}{f_0(X_i)} \leq B$, přijmeme hypotézu H_1, jestliže

$\prod_{i=1}^{n} \frac{f_1(X_i)}{f_0(X_i)} \geq A$; pokračujeme v náhodném výběru (tj.dále

budeme pracovat s náhodným výběrem $X_1, \dots, X_{n+1}$), jestliže

$B < \prod_{i=1}^{n} \frac{f_1(X_i)}{f_0(X_i)} < A$, kde čísla $B < A$ volíme tak, aby

pravděpodobnosti chyb byly rovny předepsaným číslům.

V praxi to znamená, že děláme postupně pozorování a po n-tém se buď rozhodneme pro přijetí jedné z hypotéz, nebo děláme další $(n+1)$-ní pozorování.

Odlišnost sekvenčního a nesekvenčního přístupu tkví vlastně již v jiné organizaci experimentu. Při nesekvenčním přístupu experimentátor zvolí rozsah výběru (počet opakování dílčích experimentů) nezávisle na výsledku experimentu (obvykle ještě před jeho započetím). Při sekvenčním přístupu není předem stanoven rozsah výběru, experimentátor se na základě náhodného výběru $(X_1,\dots,X_k)$ rozhoduje, zda bude pokračovat ve výběru (dělat další pozorování) nebo zda mu informace získaná z již provedeného náhodného výběru stačí k rozhodnutí.

Je zřejmé, že rozsah výběru N je v tomto případě náhodná veličina, je obecně funkcí posloupnosti náhodných veličin $\{X_i\}_{i=1}^{\infty}$ a lze pro něj psát:

$$N = \min\left\{ n\ ;\ \prod_{i=1}^{n} \frac{f_1(X_i)}{f_0(X_1)} \notin (B,A) \right\} . \tag{1.5}$$

Stanovit čísla B,A, předepíšeme-li si pravděpodobnosti chyb, je velmi obtížné, v praxi většinou nemožné, proto se obvykle spokojujeme s aproximací. Čísla B,A aproximujeme čísly

$$B^* = \frac{\beta}{1-\alpha} , \qquad A^* = \frac{1-\beta}{\alpha} , \tag{1.6}$$

kde α, β jsou dány (1.1) resp. (1.2).
Výhodou této aproximace je, že nezávisí na rozdělení náhodných veličin a snadno se počítá. Na druhé straně, jak uvidíme z dalších úvah, vede ke zvětšení rozsahu výběru N (většinou nepodstatnému).

Jev

$$\{\text{přij.}H_o,\ N=n\} = \Big\{B<\prod_{i=1}^{k}\frac{f_1(X_i)}{f_o(X_i)} < A,\quad k=1,\dots,n-1,$$
$$\prod_{i=1}^{n}\frac{f_1(X_i)}{f_o(X_i)} \leqq B\Big\}$$

závisí jen na konečném počtu náhodných veličin X_i, tudíž můžeme psát (označíme-li $W_{on} = \{\text{přij.}H_o,\ N=n\}$)

$$P(\text{přij.}H_o,\ N=n/H_1 \text{ platí}) = \int\!\!\dots\!\!\int_{W_{on}} \prod_{i=1}^{n} f_1(x_i)\,d\mu(x_1)\dots d\mu(x_n) =$$

$$=\int\dots\int_{W_{on}} \prod_{i=1}^{n}\frac{f_1(x_i)}{f_o(x_i)} \prod_{i=1}^{n} f_o(x_i)\,d\mu(x_1)\dots d\mu(x_n) \leqq$$

$$\leqq B \int\dots\int_{W_{on}} \prod_{i=1}^{n} f_o(x_i)\,d\mu(x_1)\dots d\mu(x_n) =$$

$$= B\, P(\text{přij. } H_o,\ N=n/H_o \text{ platí}).$$

Odtud máme

$$(1.7)\qquad P(\text{přij.}H_o/H_1 \text{ platí}) = \sum_{n=1}^{\infty} P(\text{přij. } H_o,\ N=n/H_1 \text{ platí}) \leqq$$
$$\leqq B\, P(\text{přij. } H_o/H_o \text{ platí}).$$

Podobně dostaneme

$$(1.8)\qquad P(\text{zam.}H_o/H_1 \text{ platí}) = A\, P(\text{zam. } H_o/H_o \text{ platí}).$$

Jestliže

$$(1.9)\qquad P(\text{přij. } H_1/H_i \text{ platí}) + P(\text{přij.}H_o/H_i \text{ platí}) = 1,\qquad i=0,1,$$

lze tyto nerovnosti přepsat následovně

(1.10) $$B^* = \frac{\beta}{1-\alpha} \leqq B, \qquad A \leqq \frac{1-\beta}{\alpha} = A^*.$$

Odtud je vidět, že použití čísel B^*, A^* místo B resp. A, může vést ke zvýšení rozsahu výběru N. Nyní se budeme zabývat úlohou, jak se změní pravděpodobnosti chyb. Označme si α^* a β^* pravděpodobnosti chyb odpovídající B^* a A^*. Vzhledem k (1.10) platí

$$\frac{\beta^*}{1-\alpha^*} \leqq \frac{\beta}{1-\alpha}, \qquad \frac{1-\beta^*}{\alpha^*} \geqq \frac{1-\beta}{\alpha}.$$

Jednoduchou úpravou dostaneme

(1.11) $$\alpha^* \leqq (1-\beta^*)\frac{\alpha}{1-\beta} < \frac{\alpha}{1-\beta},$$

(1.12) $$\beta^* \leqq \frac{\beta}{1-\alpha}(1-\alpha^*) < \frac{\beta}{1-\alpha},$$

(1.13) $$\alpha+\beta \geqq \alpha^* + \beta^*,$$

tj. součet pravděpodobností chyb se nezvětší. Tedy např. při $\alpha = \beta = 0{,}1$ platí

$$\alpha^* \leqq \frac{0{,}1}{0{,}9} = 0{,}1\overline{1} \qquad \beta^* < 0{,}1\overline{1}$$

$$\alpha^* + \beta^* \leqq 0{,}2.$$

Nyní vyvstává řada problémů: jaké jsou vlastnosti tohoto testu, zda existují jiné sekvenční testy, jak porovnávat testy a podobně. Této problematice jsou věnovány další části těchto skript.

Na závěr tohoto paragrafu si uvedeme klasický příklad.

Příklad 1. Uvažujme úlohu testu hypotézy H_0 : "náhodná veličina X má rozdělení $N(\mu_0, 1)$" proti hypotéze H_1 :"náhodná veličina X má rozdělení $N(\mu_1, 1)$", $\mu_0 < \mu_1$. Požadujeme, aby pravděpodobnosti chyb byly α a β . Připomeňme, že

$$\prod_{i=1}^{n} \frac{f_1(X_i)}{f_0(X_i)} = \exp \left\{ \sum_{i=1}^{n} X_i(\mu_1 - \mu_0) + \frac{\mu_0^2 - \mu_1^2}{2} n \right\} .$$

V nesekvenčním přístupu volíme $n = \left[\left(\frac{u_{1-\alpha} + u_{1-\beta}}{\mu_1 - \mu_0} \right)^2 \right] + 1,$

kde $[y]$ označuje celou část čísla y, hypotézu H_1 přijmeme, jestliže

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^{n} (X_i - \mu_0) \geq u_{1-\alpha} ,$$

a přijmeme H_0, platí-li nerovnost opačná; $u_{1-\alpha}$ je $100(1-\alpha)$%-ní kvantil příslušný standardizovanému normálnímu rozdělení.

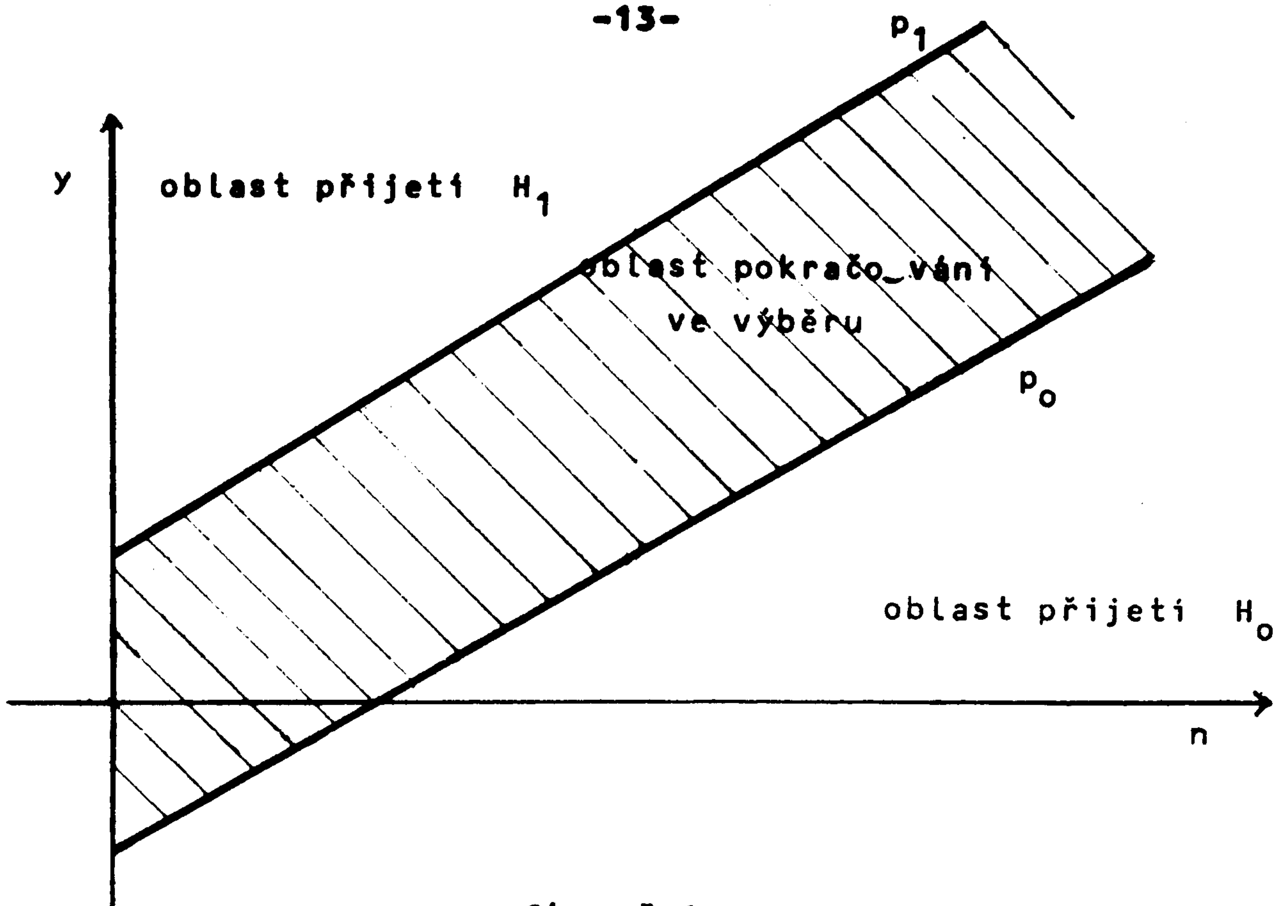
V sekvenčním přístupu na základě výběru $X_1, \dots, X_n$ přijmeme hypotézu H_0, jestliže

$$\sum_{i=1}^{n} X_i \leq (\ln \frac{\beta}{1-\alpha} + \frac{\mu_1^2 - \mu_0^2}{2} n) \frac{1}{\mu_1 - \mu_0} ,$$

přijmeme hypotézu H_1, jestliže

$$\sum_{i=1}^{n} X_i \geq (\ln \frac{1-\beta}{\alpha} + \frac{\mu_1^2 - \mu_0^2}{2} n) \frac{1}{\mu_1 - \mu_0} ,$$

jinak pokračujeme ve výběru (děláme další pozorování). Tento sekvenční test lze snadno znázornit graficky(viz obr.č.1).



Obr. č.1

Náhodnému výběru $X_1, \dots X_n$ přiřadíme bod $(n, \sum_{i=1}^{n} X_i)$. Leží-li tento bod pod přímkou

$$p_o \left(y = \left(\ln \frac{\beta}{1-\alpha} + \frac{\mu_1^2 - \mu_o^2}{2} n \right) \frac{1}{\mu_1 - \mu_o} \right)$$

přijímáme hypotézu H_o. Leží-li bod $(n, \sum_{i=1}^{n} X_i)$ nad přímkou

$$p_1 \left(y = \left(\ln \frac{1-\beta}{\alpha} + \frac{\mu_1^2 - \mu_o^2}{2} n \right) \frac{1}{\mu_1 - \mu_o} \right),$$

přijímáme hypotézu H_1. Jinak pokračujeme ve výběru. Např. při $\mu_o = -1/4 = -\mu_1$, $\alpha = \beta = 0{,}058$ dostaneme užitím testu s pevným rozsahem výběru oblast zamítnutí H_o :

$$\sum_{i=1}^{n} X_i \geq -n/4 + n^{-1/2} u_{0,942} ,$$

kde $n=41$. Užijeme-li test navržený Waldem, přijmeme hypotézu H_o, jestliže $\sum_{i=1}^{n} X_i \leq -2{,}5$ a přijmeme H_1, jestliže $\sum_{i=1}^{n} X_i \geq 2{,}5$, jinak pokračujeme ve výběru. Poznamenejme, že hodnoty $\pm$ 2,5 jsou exaktní meze odpovídající $\alpha = \beta = 0{,}058$. Použitím aproximace (1.10) dostaneme meze $\pm$ 2,788.

V sekvenční analýze často pracujeme se speciálním typem rozdělení nazývaným Darmois-Koopmanův typ rozdělení . Pro hustotu tohoto rozdělení musí platit

$$(1.14)\quad f(x;\theta) = C(\theta)\exp\left\{D(\theta)T(x)\right\} h(x),\ x \in E \subset R_1,\ \theta \in (\underline{\theta},\bar{\theta}),$$

kde $T(x)$ a $h(x)$ jsou borelovské funkce závisející pouze na x, $D(\theta)$ a $C(\theta)$ jsou reálné funkce definované na $(\underline{\theta}, \bar{\theta})$, $D(\theta)$ je klesající funkce, E nezávisí na θ.

Mezi typy rozdělení splňující (1.14) patří většina běžně používaných rozdělení, např. normální, binomické, Poissonovo atd.

Waldův test pro $H_0 : \theta = \theta_0$ proti $H_1 : \theta = \theta_1$, $\theta_0 < \theta_1$ má pro tento typ rozdělení tvar : na základě náhodného výběru $(X_1,\dots,X_n)$ z rozdělení (1.14)

a) přijmeme H_0, jestliže

$$(1.15)\quad \sum_{i=1}^{n} T(X_i) \leq (\ln B + n \ln(C(\theta_0)/C(\theta_1)))\,/(D(\theta_1)-D(\theta_0));$$

b) přijmeme H_1, jestliže

$$(1.16)\quad \sum_{i=1}^{n} T(X_i) \geq (\ln A + n \ln(C(\theta_0)/C(\theta_1)))/(D(\theta_1)-D(\theta_0));$$

c) jinak pokračujeme ve výběru.

1.2 Obecný sekvenční test

V této kapitole budeme vycházet z následujících předpokladů.

Nechť $X_1, X_2, \dots$ je posloupnost nezávislých stejně rozdělených náhodných veličin, jejíž rozdělení závisí na neznámém parametru $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_k)'$ patřícím do nějaké množiny Θ. Označme $P_\theta(.)$ a $f(.;\theta)$ pravděpodobnostní míru indukovanou rozdělením náhodných veličin $\{X_i\}_{i=1}^{\infty}$ resp. hustotu náhodné veličiny X_1 vzhledem k σ-konečné míře μ.

Uvažujme úlohu testu nulové hypotézy

$H_0 : \theta \in \omega_0$

proti alternativní hypotéze

$H_1 : \theta \in \omega_1$,

kde ω_0 a ω_1 jsou disjunktní podmnožiny Θ.

Budiž $\{B_i\}_{i=1}^{\infty}$, $\{B_i^0\}_{i=1}^{\infty}$, $\{B_i^1\}_{i=1}^{\infty}$ posloupnosti borelovských množin s vlastnostmi :

1) pro každé i jsou množiny B_i, B_i^0, B_i^1 navzájem disjunktní;

2) $R^1 = B_1 \cup B_1^0 \cup B_1^1$,

$B_1 \times R^1 = B_2 \cup B_2^0 \cup B_2^1 \subset R^2$

$\vdots$

$B_{i-1} \times R^1 = B_i \cup B_i^0 \cup B_i^1 \subset R^i$,

kde R^i je i-rozměrný eukleidovský prostor a symbol $\times$ označuje kartézský součin.

Testem S hypotézy H_0 proti hypotéze H_1 budeme rozumět pravidlo: je-li $(X_1, \dots, X_n)$ náhodný výběr z rozdělení

P_θ, pak

1) přijmeme H_0, jestliže $(X_1,\dots,X_n) \in B_n^0$, a nepokračujeme v náhodném výběru;

2) přijmeme H_1, jestliže $(X_1,\dots,X_n) \in B_n^1$, a nepokračujeme v náhodném výběru;

3) pokračujeme v náhodném výběru (tj. od náhodného výběru $(X_1,\dots,X_n)$ přecházíme k náhodnému výběru $(X_1,\dots,X_n, X_{n+1})$), kde posloupnosti množin $\{B_i\}_{i=1}^{\infty}$, $\{B_i^0\}_{i=1}^{\infty}$, $\{B_i^1\}_{i=1}^{\infty}$ mají výše popsané vlastnosti.

Někdy nazýváme množinu $\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n^0$ oblastí přijetí H_0, množinu $\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n^1$ oblastí přijetí H_1. Body $(x_1,\dots,x_n)$ patřící do $R^n-(B_{n-1} \times R^1)$ jsou neefektivní v tom smyslu, že je nevyužijeme při ověřování platnosti hypotéz neboli

$$(1.17)\quad P((X_1,\dots,X_n)\in B_n;\ \theta) + \sum_{i=1}^{n} P((X_1,\dots,X_i)\in B_i^0;\ \theta) + \sum_{i=1}^{n} P((X_1,\dots,X_i) \in B_i^1;\ \theta)=1, \quad \text{pro } n=1,2,\dots, \text{ a vš. } \theta \in \Theta .$$

Jestliže pro posloupnosti množin $\{B_i\}_{i=1}^{\infty}$, $\{B_i^0\}_{i=1}^{\infty}$, $\{B_i^1\}_{i=1}^{\infty}$ existuje přirozené číslo n takové, že

$$B_i = R^i, \quad i=1,\dots,n-1, \qquad B_n^0 \cup B_n^1 = R^n$$

mluvíme o <u>testu s pevným rozsahem výběru</u> (tj. jde o test ve smyslu uvedeném např. v [1]). Ostatní testy nazýváme <u>sekvenční</u>.

Poznamenejme, že uvedené vymezení testu nezahrnuje tzv. znáhodněné testy.

Test s pevným rozsahem skončí vždy přijetím hypotézy H_0 nebo H_1. U sekvenčních testů tomu tak být nemusí.

O testech, pro které platí

$$\lim_{n\to\infty} P((X_1,\ldots,X_n)\in B_n;\ \theta) = 0 \quad \text{pro vš. } \theta\in\Theta$$

říkáme, že skončí s pravděpodobností 1.

Nyní si zavedeme několik pojmů, se kterými budeme v dalším pracovat.

V sekvenční analýze častěji než se silofunkcí pracujeme s operační charakteristikou. Operační charakteristika testu S hypotézy H_0 proti hypotéze H_1 se nazývá funkce proměnné θ, která udává pravděpodobnost přijetí hypotézy H_0, je-li skutečná hodnota parametru θ. Označíme-li ji $L_S(\theta)$, můžeme psát :

$$(1.18)\quad L_S(\theta) = P(\text{přijetí } H_0 \text{ na základě testu } S;\ \theta) =$$

$$= P\Big(\bigcup_{i=1}^{\infty}\{(X_1,\ldots,X_i)\in B_i^0\};\ \theta\Big) = \sum_{i=1}^{\infty} P((X_1,\ldots,X_i)\in B_i^0;\theta).$$

Připomeňme, že síla testu $P_S(\theta)$ je definována jako funkce proměnné θ, která udává pravděpodobnost zamítnutí hypotézy H_0, tj.

$$(1.19)\quad P_S(\theta) = P(\text{zamítnutí } H_0 \text{ na základě testu } S;\ \theta) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} P((X_1,\ldots,X_i)\in B_i^1;\ \theta).$$

Náhodnou veličinu

(1.20) $$N = \min \{ n ; (X_1, \dots, X_n) \in B_n^0 \cup B_n^1 \}$$

nazveme <u>rozsahem výběru</u>. Její střední hodnotu nazveme <u>středním rozsahem výběru</u> a označíme $E_S(N;\theta)$.

V angličtině se někdy N nazývá "stopping time" neboť nám udává dobu, kdy máme ukončit výběr. V češtině obdobný termín neexistuje.

Na závěr paragrafu si uvedeme několik testů pro úlohu testu hypotézy $H_0 : p = p_0$ proti hypotéze $H_1 : p = p_1$, $0 < p_0 < p_1 < 1$ na základě nezávislých náhodných veličin $X_1, X_2, \dots$ s rozdělením $P(X_i=1)=p$, $P(X_i=0)=1-p$. Poznamenejme, že tytéž testy lze použít pro test hypotézy $H_0 : p \leq p_0$ proti $H_1 : p \geq p_1$.
Tato úloha odpovídá v praxi problému z kontroly jakosti. Sledujeme u výrobního procesu podíl vadných výrobků p a chceme zjistit, zda $p=p_0$ nebo $p=p_1$ (popř. $p \leq p_0$ nebo $p \geq p_1$).

1. <u>Test s pevným rozsahem výběru.</u> Experimentátor zvolí rozsah výběru $N=n_0$ a horní mez α pro pravděpodobnost chyby 1.druhu. Hypotézu H_0 přijme nebo zamítne, jestliže $\sum_{i=1}^{n_0} X_i \leq k$, resp. $\sum_{i=1}^{n_0} X_i > k$, kde k je stanoveno tak, aby $P(\sum_{i=1}^{n_0} X_i > k; H_0) \leq \alpha$. Test skončí s pravděpodobností 1 a pro operační charakteristiku $L_1(p)$ platí

$$L_1(p) = P(\sum_{i=1}^{n_0} X_i \leq k; p) = H_{n_0}(k;p),$$

(1.21) $$H_{n_0}(k,p) = \sum_{j=0}^{k} p^j (1-p)^{n_0-j} \binom{n_0}{j} .$$

2. Dvoustupňový test (podrobněji viz [9]). Volíme pevné rozsahy výběrů n_1 a n_2 a horní mez α pro pravděpodobnost chyby 1.druhu. Provedeme výběr $(X_1,\ldots,X_{n_1})$. Jestliže $\sum_{i=1}^{n_1} X_i \leq a$, přijímáme H_o a jestliže $\sum_{i=1}^{n_1} X_i > b$, přijímáme H_1. Jestliže $a < \sum_{i=1}^{n_1} X_i \leq b$, děláme další výběr $(X_{n_1+1},\ldots,X_{n_1+n_2})$ (nezávislý na $(X_1,\ldots,X_{n_1})$).
Přijímáme H_o, jestliže $\sum_{i=1}^{n_1+n_2} X_i \leq b$, a přijímáme H_1, jestliže $\sum_{i=1}^{n_1+n_2} X_i > b$.
Čísla $a < b$ jsou celá a stanovena tak, aby pravděpodobnost chyby 1.druhu byla menší nebo rovna α. Jde o sekvenční test, který skončí s pravděpodobností 1. Navíc platí

$$E(N;p) = n_1 + n_2(H_{n_1}(b;p) - H_{n_1}(a;p))$$

$$L_2(p) = H_{n_1}(a;p) + \sum_{j=a+1}^{b} \binom{n_1}{j} p^j (1-p)^{n_1-j} H_{n_2}(b-j;p).$$

3. Useknutý sekvenční test (v anglickém originále: curtailed-sampling test) : Volíme přirozená čísla c a n_o. Test je dán následujícím pravidlem: na základě náhodného výběru $(X_1,\ldots,X_n)$, $n < n_o$, přijmeme H_1, jestliže $\sum_{i=1}^{n} X_i = c$ jinak pokračujeme ve výběru; při $n = n_o$ přijímáme H_1, jestliže $\sum_{i=1}^{n_o} X_i = c$ a přijímáme H_o jinak.
Test skončí s pravděpodobností 1. Pro operační charakteristiku $L_3(p)$ a střední rozsah výběru $E_3(N;p)$ platí :

$$L_3(p) = \sum_{d=o}^{c-1} \binom{n_o}{d} p^d (1-p)^{n_o-d} ,$$

$$E_3(N;p) = \frac{c}{p} \sum_{d=c+1}^{n_0+1} \binom{n_0+1}{d} p^d (1-p)^{n_0+1-d} +$$
$$+ \frac{n_0-c+1}{1-p} \sum_{d=0}^{c-1} \binom{n_0+1}{d} p^d (1-p)^{n_0+1-d} .$$

4. Waldův sekvenční test. Volíme pravděpodobnosti chyb 1. a 2.druhu (α resp. β). Podle obecného schematu sestavíme

$$Q_n = \prod_{i=1}^{n} \frac{P(X_i=1;p_1)}{P(X_i=1;p_0)} = \left(\frac{p_1(1-p_0)}{p_0(1-p_1)}\right)^{\sum_{i=1}^{n} X_i} \left(\frac{1-p_1}{1-p_0}\right)^n$$

a označme $\ln A = a$, $\ln B = b$. Pak test popsaný na str. 8 má v tomto případě tvar : na základě náhodného výběru $(X_1,\dots,X_n)$ přijmeme H_0, jestliže

$$\sum_{i=1}^{n} X_i \leqq h_b + n\,s \;;$$

přijmeme H_1, jestliže

$$\sum_{i=1}^{n} X_i \geqq h_a + n\,s,$$

a v obou případech ukončíme výběr; v náhodném výběru pokračujeme, jestliže

$$(1.22) \qquad h_b + n\,s < \sum_{i=1}^{n} X_i < h_a + ns.$$

Hodnoty h_b, h_a a s jsou definovány následovně:

$$(1.23) \qquad h_b = b/(\ln \frac{p_1(1-p_o)}{p_o(1-p_1)}), \qquad h_a = a/(\ln \frac{p_1(1-p_o)}{p_o(1-p_1)}),$$

$$(1.24) \qquad s = (\ln \frac{1-p_o}{1-p_1}) \; / \; (\ln \frac{p_1(1-p_o)}{p_o(1-p_1)}),$$

kde b, a jsou určeny tak, aby byly splněny předpoklady (obvykle klademe $b = \ln \frac{\beta}{1-\alpha}$ a $a = \ln \frac{1-\beta}{\alpha}$ - viz (1.6)).

5. Useknutý Waldův test. Volíme pravděpodobnosti chyb 1. a 2.druhu (α resp. β) a přirozené číslo n_o. Děláme postupně náhodný výběr $X_1, X_2, \ldots$. Pro $(X_1, \ldots, X_n)$, $n < n_o$, použijeme pravidlo shodné s testem 4. Při $n = n_o$ příjmeme H_o, jestliže

$$\sum_{i=1}^{n} X_i \leqq n\, s \, ,$$

a příjmeme H_1, platí-li nerovnost obrácená. Hodnoty b, a jsou určeny tak, aby byly splněny předpoklady; v tomto případě požadujeme navíc, aby $b < 0 < a$.

6. Waldův test po skupinách. Volíme opět pravděpodobnosti chyb 1. a 2.druhu (α resp. β) a přirozené číslo k. Rozhodnutí o přijetí jedné z hypotéz popř. pokračování ve výběru děláme vždy jen po k krocích, tj. po n.k-tém pozorování příjmeme H_o, jestliže

$$\sum_{i=1}^{nk} X_i \leqq h_b + n\,k\,s$$

atd.

Vlastnostmi testů 4.-6. se budeme zabývat v kapitole 2.

Pokud se týče srovnání testů při daných pravděpodobnostech chybných rozhodnutí, potřebujeme při použití Waldova testu nejmenší střední počet pozorování. Následující tabulka udává numerické porovnání testů 1.-5. pro $p_0=0{,}01$, $p_1=0{,}1$; $\alpha=0{,}2$

test	β	E(N;0,01)
1	0,0985	22
2	0,0424	55,7
3	0,0985	19,8
4	0,0424	28,6
5	0,0985	14,3

1.3 Vlastnosti obecných sekvenčních testů

V tomto paragrafu si odvodíme některé jednoduché vlastnosti operační charakteristiky a středního rozsahu výběru. Budeme přitom vycházet z předpokladů uvedených na začátku minulého paragrafu.

Nejdříve se seznámíme s obratem běžně používaným v sekvenční analýze. Nechť $T_n = T_n(X_1,\dots,X_n)$ je statistika závisející na náhodných veličinách $X_1,\dots,X_n$, pak pro distribuční funkci náhodné veličiny T_N, kde N je rozsah výběru, platí :

$$P(T_N < t;\theta) = \sum_{n=1}^{\infty} P(T_N < t;\ N=n;\ \theta) =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \int I\left\{T_n < t, (x_1,\dots,x_n) \in B_n^0 \cup B_n^1\right\} \prod_{i=1}^{n} f(x_i;\theta)\, d\mu(x_1)\dots d\mu(x_n) \quad ,$$

kde $I\{A\}$ označuje indikátor množiny A.

Dále

$$E(T_N/H_0 \text{ přij.};\theta) = \sum_{n=1}^{\infty} E(T_N/N=n,\ H_0 \text{ přij.};\theta)\ .$$
$$.\ P(N=n/H_0 \text{ přij.};\theta) =$$
$$= \sum_{n=1}^{\infty} \int_{B_n^0} T_n(x_1,\ldots,x_n) \prod_{i=1}^{n} f(x_i;\theta)\,d\mu(x_1)\ldots d\mu(x_n)$$
$$(P(H_0 \text{ přij.};\ \theta))^{-1}\ .$$

Podobně máme pro střední hodnotu:

$$E(T_N;\theta) = \sum_{n=1}^{\infty} E(T_N\ I\{N=n\}\ ;\ \theta) =$$
$$= \sum_{n=1}^{\infty} \int_{B_n^0 \cup B_n^1} T_n(x_1,\ldots,x_n) \prod_{i=1}^{n} f(x_i;\theta)d\mu(x_1)\ldots$$
$$\ldots d\mu(x_n)$$

.

Lemma 1.1. Následující tři tvrzení jsou ekvivalentní:

a) test skončí s pravděpodobností 1 pro vš. $\theta \in \Theta$;

b) $\lim_{n\to\infty} P(N > n;\ \theta) = 0$ pro vš. $\theta \in \Theta$;

c) $P_S(\theta) + L_S(\theta) = 1$ pro vš. $\theta \in \Theta$,

kde $P_S(\theta)$ a $L_S(\theta)$ je silofunkce resp. operační charakteristika (viz (1.18),(1.19)).

Důkaz. Ekvivalence plynou snadno z příslušných definic, (1.17) a následujících vztahů:

$$P(N=n;\theta) = P((X_1,\ldots,X_n)\in B_n^0;\theta) + P((X_1,\ldots,X_n)\in B_n^1;\theta)$$

$$P(N < +\infty) = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} P(N=i;\theta).\qquad \blacksquare$$

Definujme

$$(1.25)\quad Z_i(\theta';\theta'') = \ln \frac{f(X_i;\theta'')}{f(X_i;\theta')} \quad ,\text{je-li}\ f(X_i;\theta')\neq 0, f(X_i;\theta'')\neq 0,$$

$$= 1 \quad ,\text{je-li}\ f(X_i;\theta')=0=f(X_i;\theta'')$$

$$= -\infty \quad ,\text{je-li}\ f(X_i;\theta')\neq 0, f(X_i;\theta'')=0$$

$$= +\infty \quad ,\text{je-li}\ f(X_i,\theta')=0, f(X_i,\theta'')\neq 0.$$

$$(1.26)\qquad Q_n(\theta',\theta'') = \sum_{i=1}^{n} Z_i(\theta',\theta''). \quad \blacksquare$$

Z Jensenovy nerovnosti plyne

$$(1.27)\qquad E(Z_i(\theta',\theta'');\theta') \leq 0 \leq E(Z_i(\theta',\theta'');\theta''),\quad i=1,\dots,n.$$

<u>Lemma 1.2.</u> Pro každý test S a libovolné $\theta', \theta'' \in \Theta$ splňují operační charakteristika $L_S(\theta)$ a silofunkce $P_S(\theta)$ následující vztahy:

$$(1.28)\qquad E(\exp\{Q_N(\theta',\theta'')\} \,/\, \text{přij. } H_0;\theta') = \frac{L_S(\theta'')}{L_S(\theta')}\ ,$$

$$(1.29)\qquad E(\exp\{Q_N(\theta',\theta'')\} \,/\, \text{přij. } H_1;\theta') = \frac{P_S(\theta'')}{P_S(\theta')}\ .$$

<u>Důkaz.</u> Zřejmě platí :

$$E(I\{H_0 \text{ přij.}\}\exp\{Q_N(\theta';\theta'')\};\theta') =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \int_{B_n^0} \prod_{i=1}^{n} \frac{f(x_i;\theta'')}{f(x_i;\theta')} \prod_{i=1}^{n} f(x_i;\theta')\,d\mu(x_1)\dots d\mu(x_n) =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \int_{B_n^0} \prod_{i=1}^{n} f(x_i;\theta'')\,d\mu(x_1)\dots d\mu(x_n) = P(\text{přij.} H_0;\theta'') =$$

$$= L_S(\theta'').$$

Tvrzení (1.28) nyní plyne z definice podmíněné střední hodnoty. Vztah (1.29) lze odvodit analogicky. $\blacksquare$

Poznámka 1.3. Pro testy, které skončí s pravděpodobností 1 jsou hodnoty operační charakteristiky $L_S(\theta')$ a $L_S(\theta'')$ jednoznačně určeny podmíněnými středními hodnotami v (1.28) a (1.29).

Nyní obrátíme pozornost k rozsahu výběru N. Připomeňme definici:

$$N = \min\{n; (X_1, \ldots, X_n) \in B_n^0 \cup B_n^1\} \quad .$$

Tato náhodná veličina je zřejmě markovský čas (viz str.) a tudíž lze pro výpočet její střední hodnoty využít Waldových rovností dokázaných v Doplňku. Aplikací Waldových rovností I a II dostaneme následující tvrzení:

Lemma 1.4. Nechť $X_1, X_2, \ldots$ jsou nezávislé stejně rozdělené náhodné veličiny s rozdělením závisejícím na parametru $\theta \in \Theta$.

a) Nechť statistika $t(X_1)$ a rozsah výběru N (a,b konečná čísla) mají konečné střední hodnoty při hodnotě parametru θ, pak

$$(1.30) \qquad E(N;\theta) \cdot E(t(X_1);\theta) = E(\sum_{i=1}^{N} t(X_i);\theta)$$

b) Nechť jsou splněny předpoklady a), rozptyl statistiky $t(X_1)$ je konečný a $E(t(X_1);\theta) = 0$, pak

$$(1.31) \qquad E(N,\theta) . E(t^2(X_1);\theta) = E((\sum_{i=1}^{N} t(X_i))^2;\theta) .$$

Poznamenejme, že tvrzení lemmatu platí pro libovolné statistiky $t(X_1)$ splňující předpoklady. Vztahy (1.30) a (1.31) nám dávají návod pro výpočet středního rozsahu výběru, pokud

jsme schopni spočítat $E(t(X_1);\theta)$ a $E(\sum_{i=1}^{N} t(X_i);\theta)$(resp. $E(t^2(X_1);\theta)$ a $E((\sum_{i=1}^{N} t(X_i))^2;\theta))$. Většinou není problém s výpočtem $E(t(X_1);\theta)$ a $E(t^2(X_1);\theta)$, ale se zbylými dvěma středními hodnotami (počet sčítanců je náhodný).
Často se spokojujeme jen s jejich aproximací.

Položíme-li v (1.30) $t(X_i) = Z_i(\theta',\theta'')$ a aproximujeme-li vhodně střední hodnotu na pravé straně (1.30), dostaneme následující tvrzení:

Věta 1.5. Nechť $E(|Z_i(\theta';\theta'')|;\theta) < +\infty$, $E(N;\theta') < +\infty$, kde $Z_i(\theta',\theta'')$ je definováno (1.25), $\theta', \theta'' \in \Theta$. Pak pro libovolný test S, který skončí s pravděpodobností 1, platí

$$-E(N;\theta')\, E(Z_1(\theta',\theta'');\theta') \geq L_S(\theta')\ \ln \frac{L_S(\theta')}{L_S(\theta'')} + (1-L_S(\theta'))\ \ln \frac{1-L_S(\theta')}{1-L_S(\theta'')} .$$

Důkaz: Položíme-li v Lemmatu 1.4 $t(X_i) = Z_i(\theta';\theta'')$, máme

$$E(N;\theta')E(Z_1(\theta',\theta'');\theta') = E(Q_N(\theta',\theta'');\theta).$$

Z Jensenovy nerovnosti a Lemmatu 1.2 plyne

$$E(Q_N(\theta',\theta'')/H_0 \text{ přij.};\theta') \leq \ln E(\exp\{Q_N(\theta',\theta'')\}/H_0 \text{ přij.};\theta') = \ln \frac{L_S(\theta'')}{L_S(\theta')} .$$

Podobně

$$E(Q_N(\theta',\theta'') / H_1 \text{ přij.}; \theta') \leq \ln \frac{1-L_S(\theta'')}{1-L_S(\theta')} .$$

Tvrzení lemmatu nyní vyplyne z těchto nerovností a následujícího elementárního vztahu:

$$E(Q_N(\theta',\theta''),\theta') = E(Q_N(\theta',\theta'')/H_0 \text{ přij.};\theta')P(H_0 \text{ přij.};\theta') +$$
$$+ E(Q_N(\theta',\theta'')/H_1 \text{ přij.};\theta')P(H_1 \text{ přij.};\theta'). \boxed{}$$

Důsledek 1.6. Nechť $E(Z_1(\theta_0,\theta_1);\theta_i) \neq 0$ a konečné pro $i=0,1$. Pak pro libovolný test S s $E(N;\theta_i) < +\infty$, $i=0,1$, a pravděpodobnostmi chyb menších nebo rovných α resp. β ($\beta < 1-\alpha$) pro test $H_0 : \theta = \theta_0$ proti $H_1 : \theta = \theta_1 (\theta_0 \neq \theta_1)$ platí

$$E(N;\theta_0) \gtrless \frac{(1-\alpha)\ln\frac{\beta}{1-\alpha} + \alpha \ln \frac{1-\beta}{\alpha}}{E(Z_1(\theta_0,\theta_1);\theta_0)} , \tag{1.32}$$

$$E(N;\theta_1) \gtrless \frac{\beta \ln\frac{\beta}{1-\alpha} + (1-\beta)\ln\frac{1-\beta}{\alpha}}{E(Z_1(\theta_0,\theta_1);\theta_1)} . \tag{1.33}$$

Důkaz: Položíme-li ve Větě 1.5 $\theta' = \theta_0$, $\theta'' = \theta_1$, obdržíme

$$-E(N,\theta_0)E(Z_1;\theta_0) \gtrless L(\theta_0)\ln\frac{L_S(\theta_0)}{L_S(\theta_1)} + (1-L(\theta_0))\ln\frac{1-L_S(\theta_0)}{1-L_S(\theta_1)} . \tag{1.34}$$

Z předpokladů plyne

$$1 - L_S(\theta_0) \lesseqgtr \alpha , \qquad L_S(\theta_1) \lesseqgtr \beta . \tag{1.35}$$

Jak snadno nahlédneme (vyšetřením derivací), je funkce

$$g(x,y) = x \ln\frac{x}{y} + (1-x) \ln\frac{1-x}{1-y}$$

neklesající v x při pevném y $(0 < x \lesseqgtr y < 1)$ a nerostoucí v y při pevném x $(0 < x \lesseqgtr y < 1)$. Tudíž

$$(1.36) \qquad g(L(\theta_0),\ L(\theta_1)) \geq g(1-\alpha,\ L(\theta_1)) \geq g(1-\alpha, \beta).$$

Tvrzení důsledku plyne z (1.34-1.36). ∎

Důsledek nám udává dolní hranici pro střední rozsah výběru. Tato hranice není obecně dosažitelná. Z úvah v následující kapitole vyplyne, že v řadě případů se výrazy na pravé a levé straně (1.32) resp. (1.33) liší jen nevýznamně. Např. pro případ uvažovaný na str. 13 platí, že $E(N;\ -1/4) = E(N;\ 1/4) = 20$, zatímco pro pravé strany (1.32) a (1.33) dostaneme 17. Poznamenejme, že pro test založený na Neyman-Personově lemmatu (při stejných pravděpodobnostech chyb) je rozsah výběru $n=41$.

Pro informaci o distribuční funkci rozsahu výběru N mohou posloužit následující nerovnosti:

$$P(N<n;\theta) \geq \begin{cases} 0 & n \leq E(N,\theta), \\ 1-\dfrac{E(N;\theta)}{n} & E(N;\theta) < n \leq E(N;\theta)+\dfrac{var(N;\theta)}{E(N;\theta)}, \\ \dfrac{(n-E(N;\theta))^2}{(n-E(N;\theta))^2+var(N;\theta)} & n > E(N;\theta)+\dfrac{var(N;\theta)}{E(N;\theta)}. \end{cases}$$

První nerovnost je triviální, druhá plyne z Čebyševovy nerovnosti a třetí z nerovnosti $N \geq n$ a

$$P(N \geq n;\theta) \leq E\left(\frac{N-E(N;\theta)}{N-E(N;\theta)+1}\right)^2 \left(\frac{n-E(N;\theta)+1}{n-E(N;\theta)}\right)^{-2}.$$

1.4 Kriterium optimality

Každý test $H_o : \theta \in \omega_o$ proti $H_1 : \theta \in \omega_1$ můžeme charakterizovat třemi veličinami, a to pravděpodobnostmi chyb 1. a 2.druhu a středním rozsahem výběru. Nejčastěji při hledání vhodného testu vybíráme dvě z těchto veličin a klademe na ně podmínky. Volíme pak test, který je optimální nebo aspoň "rozumný" v nějakém smyslu ve třídě testů splňujících tyto podmínky. Např. použijeme-li pro řešení úlohy test s pevným rozsahem, obvykle hledáme test, který má nejmenší pravděpodobnost chyby 2.druhu (tj. je optimální v tomto smyslu) při daném rozsahu výběru a dané horní mezi pro paravděpodobnost chyby 1.druhu. Při sekvenčním přístupu obvykle klademe podmínky na pravděpodobnosti chyb 1. a 2.druhu a hledáme test, který bude mít nejmenší střední rozsah výběru nebo se nebude od tohoto testu příliš lišit.

Nyní poněkud odbočíme. Při sekvenčním přístupu obvykle předpokládáme, že množiny ω_0 a ω_1 mají disjunktní uzávěry (je-li $\Theta \subset R^k$, vzhledem k eukleidovské standardní topologii). Bez tohoto doplňujícího předpokladu bychom totiž při $\alpha, \beta < 1/2$ jen velmi těžko hledali test s požadovanými vlastnostmi. Na druhé straně není tento předpoklad příliš omezující. Např.místo úlohy $H_o : \theta \leq \theta_o$ proti $H_1 : \theta > \theta_o$ uvažujeme při sekvenčním přístupu úlohu $H_o : \theta \leq \theta_o$ proti $H_1 : \theta \geq \theta_1$, $\theta_1 > \theta_o$, kde rozdíl $\theta_1 - \theta_o$ bereme malý v závislosti na tom, co považujeme v daném případě za "významný rozdíl".

Nyní zavedeme explicitně kriterium pro porovnání sekvenčních testů. Označme $\mathcal{C}(\alpha, \beta)$ třídu testů pro úlohu

$H_0 : \theta \in \omega_0$ proti $H_1 : \theta \in \omega_1$ splňujících:

a) test skončí s pravděpodobností 1 ;

b) $1-L_S(\theta) \leqq \alpha$ pro vš. $\theta \in \omega_0$;

c) $L_S(\theta) \leqq \beta$ pro vš. $\theta \in \omega_1$.

Test $S^* \in \mathcal{C}(\alpha, \beta)$ nazveme _eficientnější_ (vydatnější) než test $S \in \mathcal{C}(\alpha, \beta)$ na množině $\Theta_1 \subset \Theta$, jestliže

$$E_{S^*}(N;\theta) < E_S(N,\theta). \quad \text{pro vš. } \theta \in \Theta_1.$$

Test $S^* \in \mathcal{C}(\alpha, \beta)$ nazveme _stejnoměrně eficientním testem na množině_ $\Theta_1 \subset \Theta$, _jestliže_

$$\inf_{S \in \mathcal{C}(\alpha, \beta)} E_S(N;\theta) = E_{S^*}(N;\theta) \qquad \text{pro vš. } \theta \in \Theta_1.$$

Nejprve uvažujme případ jednoduchých hypotéz, tj. $H_0: \theta = \theta_0$ proti $H_1: \theta = \theta_1$, $\theta_0 \neq \theta_1$. Fundamentální roli zde hraje test, se kterým jsme se již seznámili v úvodním paragrafu, jde o _Waldův (sekvenční) test (ozn. S(b,a))_. Je vymezen následujícím rozhodovacím pravidlem : je-li $(X_1, \dots, X_n)$ náhodný výběr z rozdělení s hustotou $f(x;\theta)$, pak

a) přijmeme H_0 a zastavujeme náhodný výběr, jestliže $Q_n(\theta_0, \theta_1) \leqq b$;

b) přijmeme H_1 a zastavujeme náhodný výběr, jestliže $Q_n(\theta_0, \theta_1) \geqq a$;

c) jinak pokračujeme v náhodném výběru; Q_n je dáno (1.26).

Někdy se tento test též nazývá _sekvenční test poměru pravděpodobnosti._

Základní tvrzení o existenci a tvaru eficientního testu pro $H_o : \theta = \theta_o$ proti $H_1 : \theta = \theta_1$ je následující:

<u>Věta 1.7.</u> Nechť $\{X_i\}_{i=1}^{\infty}$ je posloupnost nezávislých náhodných veličin s týmž rozdělením daným hustotou $f(x ; \theta)$ $\theta \in \Theta$ (obsahující aspoň 2 body). Pak mezi všemi testy S (sekvenčními i nesekvenčními) $H_o : \theta = \theta_o$ proti $H_1 : \theta=\theta_1$, $\theta_o \neq \theta_1 \subset \Theta$, které náleží do $\mathcal{C}(\alpha, \beta)$ a pro které $E_S(N;\theta_i) < +\infty$, $i=0,1$, je Waldův sekvenční test $S(b,a)$ stejnoměrně eficientní v bodech θ_o a θ_1, tj.

$$E_{S(b,a)}(N;\theta_i) = \min_{S \in \mathcal{C}(\alpha,\beta)} E_S(N;\theta_i) \qquad i=0,1.$$

Konstanty b,a jsou určeny tak, aby pravděpodobnosti chyb byly α resp. β.

<u>Důkaz</u> je velmi komplikovaný, proto jej vynecháme. Čtenář jej může najít např. v [10], [16]. ▨

V případě složených hypotéz obecně neexistuje stejnoměrně eficientní test. Existují jen pro některé specielní tvary hypotéz. Např. pro úlohu tvaru $H_o : \theta \leq \theta_o$ proti $H_1 : \theta \geq \theta_1$, $\underline{\theta} < \theta_o < \theta_1 < \bar{\theta}$ lze dokázat (za dosti silných předpokladů o rozdělení náhodných veličin X_i - silnějších než při obdobné úloze o testech s pevným rozsahem), že Waldův test $S(b,a)$ pro úlohu $H_o : \theta \leq \theta_o$ proti $H_1 : \theta \geq \theta_1$ je stejnoměrně eficientním na $(\underline{\theta}, \bar{\theta})$.

Neexistuje-li stejnoměrně eficientní test pro úlohu $H_o : \theta \in \omega_o$ proti $H_1 : \theta \in \omega_1$ (obdobně jako u testů s pevným rozsahem) lze zvolit jiné kriterium optimality nebo hledat eficientní test ve vhodné třídě testů $\mathcal{C}'(\alpha,\beta) \subset \mathcal{C}(\alpha,\beta)$ (např. ve třídě invariantních testů). Z jiných kriterií se často uvažuje test $S^* \in \mathcal{C}(\alpha,\beta)$ minimalizující buď $\sup_{\theta\in\Theta} E_S(N;\theta)$ nebo $\sup_{\theta\in\omega_0\cup\omega_1} E_S(N,\theta)$ ve třídě testů $S \in \mathcal{C}(\alpha,\beta)$. Další možné kriterium nabízejí bayesovské metody, podrobně viz [5],[12] .

V posledních letech byly navrženy také asymptotické eficience jako analogie asymptotických eficiencí užívaných pro testy s pevnými rozsahy (Hodges-Lehmanova eficience, Chernoffova eficience, Bahadurova eficience atd.). Zároveň byla pro ně dokázána řada tvrzení a porovnány různé sekvenční testy na základě těchto eficiencí (viz[5],[6], [7]).

Kromě toho existuje řada principů, jak zkontruovat "rozumný" test pro danou úlohu. Podrobně si osvětlíme tyto principy v kapitole 3.

2. Waldův sekvenční test

2.1 Základní vlastnosti

V celé kapitole budeme vycházet z předpokladu, že $X_1, X_2, \dots$ jsou nezávislé stejně rozdělené náhodné veličiny, X_1 má hustotu $f(x,\theta)$ (vzhledem k σ - konečné míře μ), $\theta \in (\underline{\theta}, \bar{\theta})$, $\underline{\theta} < \bar{\theta}$. Budeme se zabývat vlastnostmi Waldova (sekvenčního) testu $S(b,a)$, $-\infty < b < a < +\infty$, pro test hypotézy $H_0 : \theta = \theta_0$ proti $H_1 : \theta = \theta_1$, $\theta_0 \neq \theta_1 \in (\underline{\theta}, \bar{\theta})$ (definice viz (str. 30).

Označme

(2.1) $\qquad P(\text{přij.}H_0 \text{ na zákl. } S(b,a); \theta_1) = \beta$

(2.2) $\qquad P(\text{přij.}H_1 \text{ na zákl. } S(b,a); \theta_0) = \alpha$.

V dalším budeme většinou psát Z_i a Q_n místo $Z_i(\theta_0, \theta_1)$ resp. $Q_n(\theta_0, \theta_1)$.

Poznamenejme, že Waldův test $S(b,a)$ někdy též zadáváme nerovnostmi

(2.3) $\qquad b < Q_n < a, \quad n = 1, 2, \dots$,

které nazýváme kritickými nerovnostmi.

Nejprve si shrneme vlastnosti testu odvozené v 1.1.

Lemma 2.1: Pro Waldův sekvenční test $S(b,a)$ platí

(2.4) $\qquad a \leq \ln \frac{1-\beta}{\alpha} \quad , \qquad b \geq \ln \frac{\beta}{1-\alpha}$.

Označíme-li α' a β' pravděpodobnosti chyb 1.resp. 2.druhu odpovídající testu $S(\ln \frac{\beta}{1-\alpha}$, $\ln \frac{1-\beta}{\alpha}$), platí

$$\alpha' < \frac{\alpha}{1-\beta} \quad , \quad \beta' < \frac{\beta}{1-\alpha} \quad , \quad \alpha' + \beta' \leq \alpha + \beta \quad .$$

Nerovnost $b < a$ implikuje

$$\ln \frac{\beta}{1-\alpha} < \ln \frac{1-\beta}{\alpha} \quad , \qquad \alpha < 1-\beta \quad .$$

Připomeňme, že hodnoty b, a obvykle aproximujeme hodnotami

$$(2.5) \qquad b^* = \ln \frac{\beta}{1-\alpha} \qquad \text{resp.} \qquad a^* = \ln \frac{1-\beta}{\alpha} \quad .$$

Wald ukázal, že použitím testu $S(\ln \frac{\beta}{1-\alpha}$, $\ln \frac{1-\beta}{\alpha}$) místo $S(b,a)$ s vlastnostmi (2.1) a (2.2) se zvýší střední rozsah výběru při $\theta=\theta_o$ přibližně o

$(\ln q_1(\theta_o))/E(Z_1;\theta_o)$ a při $\theta = \theta_1$ o $(\ln q_2(\theta_1))/E(Z_1;\theta_1)$, kde $q_1(\theta_o)$ a $q_2(\theta_o)$ jsou dány (2.42) resp.(2.43).

Následující věta má základní význam, neboť tvrdí, že za velmi obecných podmínek Waldův test nejen skončí s pravděpodobností 1, ale má konečnou momentovou vytvořující funkci.

Věta 2.2. Nechť

$$(2.6) \quad P\left(\frac{f(X_1;\theta_1)}{f(X_1;\theta_o)} > 1; \theta\right) > 0, \quad P\left(\frac{f(X_1;\theta_1)}{f(X_1;\theta_o)} < 1; \theta\right) > 0 \qquad \theta \in (\underline{\theta}, \bar{\theta}).$$

Pak test $S(b,a)$, $-\infty < b < 0 < a < +\infty$, skončí s pravděpodobností 1 , $E(N^k;\theta) < +\infty$ pro lib. $k > 0$ a $\theta \in (\underline{\theta}, \bar{\theta})$ a existuje číslo $t_o(\theta) > 0$ takové, že $E(\exp\{tN\}; \theta) < +\infty$ pro vš. $t \leq t_o(\theta)$.

Důkaz plyne z Věty D 4. ▨

Předpoklady pro $\theta = \theta_o$ a $\theta = \theta_1$ jsou splněny, jestliže

$$P\left(\frac{f(X_1;\theta_1)}{f(X_1;\theta_o)} > 0;\ \theta_j \right) > 0, \quad j=0,1.$$

Věta 2.3. Nechť $S(b,a)$ a $S(b',a')$ jsou Waldovy testy pro úlohu $H_o:\theta=\theta_o$ proti $H_1:\theta=\theta_1$. Nechť $L(\theta)$, $P(\theta)$ a $L'(\theta)$, $P'(\theta)$ jsou odpovídající operační charakteristiky a síly testu splňující

$$(2.7) \qquad P(\theta_o) > P'(\theta_o), \qquad L(\theta_1) > L'(\theta_1).$$

Pak platí

$$b' \leqq b < a \leqq a' ,$$

kde aspoň jedna nerovnost $b' \leqq b$, $a \leqq a'$ je ostrá,

$$(2.8) \qquad E(N;\theta) \leqq E(N';\theta) \quad \text{pro vš.} \quad \theta \in (\underline{\theta}, \bar{\theta}),$$

kde N a N' jsou rozsahy výběru příslušné $S(b,a)$ resp. $S(b', a')$. Je-li $E(N;\theta) = +\infty$, je též $E(N';\theta) = +\infty$.

Důkaz.

1) Vzhledem k předpokladům nemůže současně platit $a=a'$, $b=b'$.

2) Předpokládejme $b'\leqq b$, $a'< a$. Pak

$$\{\text{přij. } H_1 \text{ na zákl. } S(b,a)\} \subset \{\text{přij. } H_1 \text{ na zákl. } S(b', a')\}$$

$$P(\theta_o) \leqq P'(\theta_o),$$

což je ve sporu s předpokladem věty

3) Případ $b'>b$, $a'\geqq a$ nemůže nastat z důvodů obdobných 2).

4) Předpokládejme $b'>b$, $a'<a$. Potom máme

$$E(e^{Q_N} / \text{přij. } H_o \text{ na zákl. } S(b,a);\ \theta_o) \leqq$$
$$\leqq E(e^{Q_{N'}} / \text{přij. } H_o \text{ na zákl. } S(b', a');\theta_o).$$

Odtud a z Lemmatu 2.1 plyne

$$\frac{L(\theta_1)}{L(\theta_o)} \leq \frac{L'(\theta_1)}{L'(\theta_o)} \quad . \tag{2.9}$$

Dále pro každé n přirozené máme

$$P(N \leq n; \theta) \leq P(N' \leq n; \theta), \qquad \theta \in (\underline{\theta}, \bar{\theta}),$$

což implikuje

$$P(N < +\infty ; \theta) \leq P(N' < +\infty, \theta), \qquad \theta \in (\underline{\theta}, \bar{\theta}) \ . \tag{2.10}$$

Z (2.9) a (2.10) dostáváme spor s předpokladem (užijeme faktu, že pro lib.test $1 = P(N = +\infty; \theta) + L(\theta) + P(\theta))$. Tedy musí platit $b' \leq b < a \leq a'$, kde aspoň jedna z neostrých nerovností je ostrá. Odtud však plyne

$$\{N \leq n\} \supset \{N' \leq n\} \quad ,$$

což má za následek:

$$\lim_{M \to \infty} \sum_{n=1}^{M} P(N \geq n; \theta) \leq \lim_{M \to \infty} \sum_{n=1}^{M} P(N' \geq n; \theta).$$

Poslední nerovnost je ekvivalentní s (2.8). ▨

Jinými slovy Věta 2.3 říká, že test $S(b,a)$ je efficientní ve třídě všech Waldových testů $S(b', a')$ splňujících

$$P(\theta_o) \geq P'(\theta_o), \quad L(\theta_1) \geq L'(\theta_1).$$

V dalším tvrzení budeme potřebovat pojem zobecněného Waldova testu $S(\{b_n, a_n\}_{n=1}^{\infty})$, $b_n < a_n$, $n=1,2,\ldots$, pro test hypotézy $H_o: \theta = \theta_o$ proti $H_1: \theta = \theta_1$, kterým budeme rozumět test s rozhodovacím pravidlem : na základě náhodného výběru $(X_1,\ldots,X_n)$

a) přijmeme H_o a končíme s náhodnými výběrem, jestliže

$$Q_n(\theta_o,\theta_1) \leq b_n,$$

b) přijmeme H_1 a končíme s náhodným výběrem, jestliže

$$Q_n(\theta_o,\theta_1) \geq a_n,$$

c) jinak pokračujeme v náhodném výběru; $Q_N(\theta_o,\theta_1)$ je dáno (1.26).

<u>Lemma 2.4</u> . Pro každý Waldův zobecněný test $S(\{b_n,a_n\}_{n=1}^{\infty})$ platí

(2.11) $$L(\theta_o) \geq L(\theta_1)$$

(2.12) $$P(\theta_o) \leq P(\theta_1).$$

<u>Důkaz.</u> Stačí ukázat, že

(2.13a) $P(N\leq n;\ H_o\ \text{přij.};\theta_o) \geq P(N\leq n;H_o\ \text{přij.};\theta_1)$, $n=1,2,\dots$

(2.13b) $P(N\leq n;H_1\ \text{přij.};\theta_o) \leq P(N\leq n;H_1\ \text{přij.};\ \theta_1)$, $n=1,2,\dots$

Je-li $e^{b_n} \leq 1$, platí

(2.14) $$P(N=n,\text{přij.}H_o;\theta_o) - P(N=n,\text{přij.}H_o;\ \theta_1) \geq$$
$$\geq (1- e^{b_n})\ P(N=n,\text{přij.}H_o;\ \theta_o) \geq 0\ .$$

Je-li $e^{b_n} > 1$, je také $e^{a_n} > 1$ a máme

(2.15) $$P(N=n,\text{přij.}H_1;\theta_o) - P(N=n,\text{přij.}H_1;\ \theta_1) \leq$$
$$\leq (1- e^{a_n})\ P(N=n,\text{přij.}\ H_1;\ \theta_o) \leq 0,$$

(2.16) $$P(N>n;\theta_o)-P(N>n;\theta_1) \leq (1- e^{b_n})P(N>n;\ \theta_o) \leq 0.$$

Při odvození (2.16) se použije faktu, že jev $\{N > n\}$ implikuje

$$\left\{ \prod_{i=1}^{n} \frac{f(X_i;\theta_1)}{f(X_i;\theta_0)} > e^{b_n} \right\} .$$

Dále můžeme psát

$$(2.17)\quad P(N>n;\theta_0) + P(N\leq n, přij. H_0;\theta_0) + P(N\leq n, přij. H_1;\theta_0) =$$
$$= P(N>n;\theta_1) + P(N\leq n, přij. H_0;\theta_1) + P(N\leq n, přij. H_1;\theta_1).$$

Platnost vztahů (2.13) dokážeme indukcí. Předpokládejme, že (2.13) platí pro $n=m$. Je-li $e^{b_{m+1}} \leq 1$, pak platnost vztahu (2.13a) pro $n=m+1$ plyne z indukčního předpokladu a (2.14). Je-li $e^{b_{m+1}} > 1$, plyne vztah (2.13a) pro $n=m+1$ z indukčního předpokladu a (2.15-2.17).

Vztah (2.13b) lze dokázat obdobně. ▨

Lemma 2.4 lze přeformulovat, použijeme-li pojmu nestranný test (viz [1] str.248). Lemma tvrdí, že libovolný zobecněný Waldův test je nestranný a to jak pro test H_0 proti H_1, tak pro test H_1 proti H_0. Poznamenejme, že tvrzení lemmatu platí i pro testy, které nemusí skončit s pravděpodobností 1.

Nyní si ukážeme, že pro Darmoisův-Koopmanův typ rozdělení (viz (1.14)) má každý Waldův test monotonní operační charakteristiku.

__Věta 2.5.__ Nechť $\{X_i\}_{i=1}^{\infty}$ je posloupnost nezávislých stejně rozdělených náhodných veličin s hustotou tvaru (1.14).

Pak libovolný zobecněný Waldův test $S(\{b_n, a_n\}_{n=1}^{\infty})$ pro úlohu $H_o:\theta = \theta_o$ proti $H_1:\theta = \theta_1$, $\theta_o < \theta_1$, $\theta_o, \theta_1 \in (\underline{\theta}, \bar{\theta})$ má nerostoucí operační charakteristiku na intervalu $(\underline{\theta}, \bar{\theta})$.

<u>Důkaz.</u> Na základě zobecněného Waldova testu $S(\{b_n, a_n\}_{n=1}^{\infty})$ pro test $H_o:\theta = \theta_o$ proti $H_1:\theta = \theta_1$, $\theta_o < \theta_1$ pokračujeme ve výběru, jestliže

$$c_n < \sum_{i=1}^{n} T(X_i) < d_n, \tag{2.18}$$

kde

$$c_n = (b_n + n \ln \frac{C(\theta_o)}{C(\theta_1)}) / (D(\theta_1) - D(\theta_o)) \tag{2.19}$$

$$d_n = (a_n + n \ln \frac{C(\theta_o)}{C(\theta_1)}) / (D(\theta_1) - D(\theta_o)). \tag{2.20}$$

Zvolne nyní body $\theta' < \theta'' \in (\underline{\theta}, \bar{\theta})$ libovolně a pevně. Ukážeme, že

$$L_S(\theta') \geq L_S(\theta''), \tag{2.21}$$

kde $L_S(\theta)$ je operační charakteristika testu $S(\{b_n, a_n\}_{n=1}^{\infty})$ Uvažujme nyní úlohu testu hypotézy $H_o':\theta = \theta'$ proti $H_1':\theta = \theta''$ na základě Waldova zobecněného testu $S(\{b_n^*, a_n^*\}_{n=1}^{\infty})$. Čísla a_n^* a b_n^* jsou zvolena tak, aby kritická nerovnost testu byla tvaru (2.18). Podle Lemmatu 2.4 platí pro operační charakteristiku toho to testu:

$$L^*(\theta') \geq L^*(\theta''). \tag{2.22}$$

Z definice testů $S(\{b_n, a_n\}_{n=1}^{\infty})$ a $S(\{b_n^*, a_n^*\}_{n=1}^{\infty})$ plyne

(2.23) $L^*(\theta) = L(\theta)$ pro $\theta \in (\underline{\theta}, \bar{\theta})$.

(2.21) nyní vyplývá z (2.22) a (2.23). ▨

Lze odvodit řadu dalších vlastností Waldova testu. Bez důkazu si zde uvedeme některé z nich. Jestliže náhodná veličina $Z_1(\theta_0, \theta_1)$ má spojité rozdělení přiřazující každému nedegenerovanému intervalu kladnou pravděpodobnost, pak pro dané $\alpha, \beta \in (0,1)$ existuje nanejvýš jeden Waldův test (podrobně viz [25]). Dále Waldův test existuje (tj. konstanty $b < a$) pro daná α, β jestliže $0 < \alpha + \beta < 1$.

2.2 Aproximace operační charakteristiky a středního rozsahu výběru

Operační charakteristiku příslušnou Waldovu testu $S(b,a)$ obecně nelze vyjádřit pomocí nějaké ne příliš složité funkce (toto platí dokonce i pro případ, že náhodné veličiny X_i mají normální rozdělení). Proto bylo odvozeno několik typů aproximací. Zde se seznámíme s tzv. Waldovou aproximací, která je nejjednodušší. Aproximaci Page-Kempovu může čtenář najít v knize [10]. Zde lze také nalézt informaci o možnosti určení exaktních hodnot operační charakteristiky.

Vyjdeme z Waldovy fundamentální identity (viz Doplněk) a Věty D.3. Na základě těchto vět si můžeme zformulovat následující tvrzení:

Věta 2.6. Nechť $E(\exp\{tZ\} ;\theta) < +\infty$ pro vš. t reálná a vš. $\theta \in (\underline{\theta},\bar{\theta})$, $b < 0 < a$, nechť platí (2.6). Pak existuje reálná funkce $h(\theta)$ definovaná na $(\underline{\theta},\bar{\theta})$, rovna nule jen v bodě θ^*, pro který $E(Z_1;\theta^*) = 0$ a taková, že

(2.24) $$E(\exp\{h(\theta)Q_N\};\ \theta) = 1 \quad \text{pro vš. } \theta \in (\underline{\theta},\bar{\theta}),$$

kde Q_N je definována (1.26).

Zřejmě

(2.25) $$h(\theta_o) = 1 \qquad h(\theta_1) = -1.$$

Z definice podmíněné střední hodnoty plyne

(2.26) $$E(\exp\{h(\theta)Q_N\};\theta) = E(\exp\{h(\theta)Q_N\} / H_o \text{ přij.};\ \theta).$$
$$.P(H_o \text{ přij.};\theta) + E(\exp\{h(\theta)Q_N\} / H_1 \text{ přij.};\ \theta)P(H_1 \text{přij.}\cancel{\theta}).$$

Podmíněné střední hodnoty na pravé straně aproximujeme následovně:

(2.27) $$E(\exp\{h(\theta)Q_N\} / H_o \text{ přij.};\theta) \cong \exp\{h(\theta)b\},$$

(2.28) $$E(\exp\{h(\theta)Q_N\} / H_1 \text{ přij.};\theta) \cong \exp\{h(\theta)a\}.$$

Znaménko aproximace $\cong$ můžeme nahradit rovností, jestliže Q_N může nabýt jen hodnot b nebo a.

Nyní z (2.26-2.28) dostáváme aproximaci pro operační charakteristiku (za uvedených předpokladů jde o test skončící s pravděpodobností 1):

(2.29) $$L_S(\theta) \cong \hat{L}_S(\theta) = \frac{1 - e^{h(\theta)a}}{e^{h(\theta)b} - e^{h(\theta)a}},\ E(Z_1;\theta) \neq 0.$$

Je-li $E(Z_1;\theta^*) = 0$, neobdržíme tímto postupem žádnou aproximaci pro $L_S(\theta^*)$. Je-li $h(\theta)$ spojitá v okolí bodu θ^* a různá od nuly v tomto okolí (pak $\lim_{\theta \to \theta^*} h(\theta) = 0$), můžeme $L_S(\theta^*)$ aproximovat následovně:

$$(2.30) \qquad L_S(\theta^*) \cong \hat{L}_S(\theta^*) = \lim_{\theta \to \theta^*} \frac{1 - e^{h(\theta)a}}{e^{h(\theta)b} - e^{h(\theta)a}} = \frac{a}{a-b} \quad .$$

Tyto aproximace jsou na jednu stranu velice jednoduché, na druhou stranu jsou dobré jen tehdy, neliší-li se od sebe příliš výrazy na pravých a levých stranách (2.27) a (2.28). Chceme-li vypočítat aproximace při daném rozdělení, musíme spočítat $h(\theta)$, To určíme jako nenulové řešení rovnice

$$(2.31) \qquad E(\exp\{h(\theta)Z_1\} ;\theta) = 1$$

(viz Věta D.3).

V některých případech lze tuto rovnici snadno řešit jako např. u normálního rozdělení. U jiných lze řešit jen numericky (což je případ binomického rozdělení). Někdy se v tomto případě postupuje tak, že volíme hodnoty h a hledáme k nim příslušné θ tak, aby $h = h(\theta)$.

Nyní si odvodíme aproximaci pro průměrný rozsah výběru $E_S(N;\theta)$. Vyjdeme z Lemmatu 1.4 a použijeme Waldovy aproximace pro operační charakteristiku. Předpokládejme, že platí (2.6) a $0 < |E(Z_1;\theta)| < +\infty$. Pak podle Věty 2.2 je $E(N;\theta) < +\infty$ a podle Lemmatu 1.4 platí

$$(2.32) \qquad E_S(N;\theta) = \frac{E(Q_N;\theta)}{E(Z_1;\theta)} \quad .$$

Navíc máme

$$(2.33) \qquad E(Q_N;\theta) = E(Q_N|H_o \text{ přij.};\theta).\ P(H_o \text{ přij.};\theta) +$$
$$+ E(Q_N|H_1 \text{ přij.};\theta)\ P(H_1 \text{ přij.};\theta).$$

Podmíněné střední hodnoty na pravé straně aproximujeme následovně:

$$(2.34) \qquad E(Q_N|H_o \text{ přij.};\theta) \cong b$$

$$(2.35) \qquad E(Q_N|H_1 \text{ přij.};\theta) \cong a.$$

Nyní z (2.32 - 2.35) obdržíme následující aproximaci pro $E(N;\theta)$

$$(2.36) \qquad E_S(N;\theta) \cong \hat{E}(N;\theta) = \frac{L_S(\theta)b+(1-L_S(\theta))a}{E(Z_1;\theta)} \cong$$
$$\cong \hat{\hat{E}}(N;\theta) = \frac{\hat{L}_S(\theta)b+(1-\hat{L}_S(\theta))a}{E(Z_1;\theta)}, \quad E(Z_1;\theta) \neq 0,$$

kde $\hat{L}_S(\theta)$ je dáno (2.29). Je-li $E(Z_1;\theta^*) = 0$, pak za dodatečného předpokladu $0 < E(Z_1^2;\theta^*) < +\infty$, platí(viz Lemma 1.4):

$$E_S(N;\theta^*) = \frac{E(Q_N^2;\theta^*)}{E(Z_1^2;\theta^*)}, \qquad E(Z_1;\theta^*) = 0.$$

Postupujeme-li obdobně jako při $E(Z_1;\theta) \neq 0$, dostaneme aproximaci

$$(2.37) \qquad E_S(N;\theta^*) \cong \hat{E}(N;\theta^*) = \frac{L_S(\theta^*)b^2+(1-L_S(\theta^*))a^2}{E(Z_1^2;\theta^*)} \cong$$

$$E(Z_1;\theta^*) = 0$$

$$\approx \hat{E}(N;\theta^*) = \frac{-ab}{E(Z_1^2;\theta^*)} \quad .$$

V bodech $\theta = \theta_0, \theta_1$ dostáváme následující aproximace (navíc aproximujeme b,a hodnotami $\ln \frac{\beta}{1-\alpha}$ resp. $\ln \frac{1-\beta}{\alpha}$) :

$$(2.38) \qquad E_S(N;\theta_0) \approx \frac{(1-\alpha)\ln \frac{\beta}{1-\alpha} + \alpha \ln \frac{1-\beta}{\alpha}}{E(Z_1;\theta_0)} \quad ,$$

$$(2.39) \qquad E_S(N;\theta_1) \approx \frac{\ln \frac{\beta}{1-\alpha} + (1-\beta)\ln \frac{1-\beta}{\alpha}}{E(Z_1;\theta_1)} \quad .$$

Vzhledem k Důsledku 1.6 (str. 27) jsou hodnoty na pravých stranách rovny dolním mezím pro $E(N;\theta_0)$ resp. $E(N;\theta_1)$. Jsou-li tedy aproximace adekvátní, jsou $E(N;\theta_0)$ a $E(N;\theta_1)$ prakticky rovny dolním mezím.

Paragraf uzavřeme tvrzením o operační charakteristikce a středním rozsahu výběru, na základě kterých můžeme usuzovat na adekvátnost či neadekvátnost Waldovy aproximace.

Věta 2.7. Nechť jsou splněny předpoklady Věty 2.6. Pak pro operační charakteristiku $L_S(\theta)$ Waldova testu $S(b,a)$, $b < 0 < a$, platí

$$(2.40) \qquad \frac{1 - e^{ah(\theta)}}{q_1(\theta)\, e^{bh(\theta)} - e^{ah(\theta)}} \leq L_S(\theta) \leq$$

$$\leq \frac{1 - q_2(\theta)\, e^{ah(\theta)}}{e^{bh(\theta)} - q_2(\theta)\, e^{ah(\theta)}} \, , \qquad h(\theta) > 0$$

$$(2.41)\qquad \frac{1-e^{ah(\theta)}}{q_2(\theta)\,e^{bh(\theta)}-e^{ah(\theta)}} \leqq L_S(\theta) \leqq$$

$$\leqq \frac{1-q_1(\theta)\;e^{ah(\theta)}}{e^{bh(\theta)}-q_1(\theta)\,e^{ah(\theta)}}\,,\qquad h(\theta)<0,$$

kde

$$(2.42)\qquad q_1(\theta) = \inf_{1<y<+\infty}\left\{ y\ E(\exp\{h(\theta)Z_1\}\,/\exp\{h(\theta)Z_1\} \leqq \tfrac{1}{y};\ \theta)\right\},$$

$$(2.43)\qquad q_2(\theta) = \sup_{0<y<1}\left\{ y\ E(\exp\{h(\theta)Z_1\}/\exp\{h(\theta)Z_1\} \geqq \tfrac{1}{y};\ \theta)\right\}.$$

Důkaz: Předpokládejme $h(\theta)>0$, θ pevné. Označíme-li

$$F_1(y;\theta) = \sum_{n=1}^{\infty} P(\exp\{(Q_{N-1}-b)\,h(\theta)\} \leqq y, N=n;\theta),$$

$$F_2(y;\theta) = \sum_{n=1}^{\infty} P(\exp\{(Q_{N-1}-a)\,h(\theta)\} \leqq y, N=n;\theta),$$

můžeme psát

$$E(\ \exp\{h(\theta)Q_N\}\ /\ Q_N \leqq b;\theta) =$$

$$= E(\ \exp\{h(\theta)(Q_{N-1}+Z_N)\}\ /\ Z_N = b-Q_{N-1};\theta) =$$

$$= e^{bh(\theta)} \int_1^{+\infty} y\ E(e^{h(\theta)Z_1}\ /\ Z_1 \leqq -\frac{\ln y}{h(\theta)})\ d\,F_1(y;\theta)$$

$$\geqq e^{bh}\ q_1(\theta).$$

Podobně dostaneme

$$E(\exp\{h(\theta)Q_N\}\ /Q_N \geqq a;\theta) \leqq e^{ah(\theta)}\quad q_2(\theta).$$

Odtud pro vš. $\theta\in(\underline{\theta},\bar{\theta})\,\&\,h(\theta)>0$, máme

$$q_1(\theta)\ e^{bh(\theta)} \leqq E(e^{h(\theta)Q_N} \ / \ Q_N \leqq b;\theta) \leqq e^{bh(\theta)}$$

$$e^{ah(\theta)} \leqq E(e^{h(\theta)Q_N} \ / \ Q_N \geqq a;\theta) \leqq q_2(\theta)\ e^{ah(\theta)} \quad .$$

Z těchto dvou nerovností a z (2.26) již snadno plyne (2.40). Je-li $h(\theta) < 0$, pak uvedený postup aplikujeme na Waldův test $S(-a,-ab)$ založený na $-Z_1$. Nerovnosti (2.42) dokážeme obdobně. ∎

Položíme-li $b = \ln \frac{\beta}{1-\alpha}$, $a = \ln \frac{1-\beta}{\alpha}$, obdržíme nerovnosti:

$$\frac{\alpha(1-\alpha-\beta)}{(1-\alpha)(1-\beta)q_2(\theta_0)-\alpha\beta} \leqq P(\theta_0) \leqq \frac{\alpha(1-\alpha-\beta)q_1(\theta_0)}{(1-\alpha)(1-\beta)-\alpha\beta\, q_1(\theta_0)}$$

$$\frac{\beta(1-\alpha-\beta)}{(1-\alpha)(1-\beta)q_2(\theta_1)-\alpha\beta} \leqq L(\theta_1) \leqq \frac{\beta(1-\alpha\, q_1(\theta_1)-\beta)}{(1-\alpha)(1-\beta)-\alpha\beta\, q_1(\theta_1)} \quad .$$

Z tvrzení věty plyne, že Waldova aproximace operační charakteristiky je adekvátní, jestliže funkce $q_1(\theta)$, $q_2(\theta)$ se liší málo od 1.

Věta 2.8. Nechť jsou splněny předpoklady Věty 2.6. Pak pro střední rozsah výběru $E(N;\theta)$ Waldova testu $S(b,a)$ $b < 0 < a$ platí:

$$(2.44) \qquad \frac{(b + q_3(\theta))\ L(\theta) + a(1-L(\theta))}{E(Z_1;\theta)} \leqq E(N;\theta) \leqq$$

$$\leqq \frac{b\ L(\theta) + (a + q_4(\theta))(1-L(\theta))}{E(Z_1;\theta)} \ , \quad E(Z_1;\theta) > 0,$$

kde

$$(2.45) \qquad q_3(\theta) = \inf_{r>0} E(Z_1+r \,/\, Z_1 \leqq -r;\ \theta),$$

$$(2.46) \qquad q_4(\theta) = \sup_{r>0} E(Z_1-r \,/\, Z_1 \geqq r;\ \theta).$$

Při $E(Z_1;\theta) < 0$ platí opačné nerovnosti.

Je-li $E(Z_1;\theta^*) = 0$ pro $\theta^* \in (\underline{\theta},\bar{\theta})$, pak

$$(2.47) \qquad \frac{b^2 L(\theta^*) + a^2(1-L(\theta^*))}{E(Z_1^2;\theta)} \leqq E(N;\theta^*) \leqq$$

$$\leqq \{(b^2+2bq_3(\theta^*)+q_5(\theta^*))\ L(\theta^*)+(a^2+2aq_4(\theta^*)+q_6(\theta^*)) \,.$$

$$.\ (1-L(\theta^*))\}\ (E(Z_1^2;\theta^*))^{-1},$$

kde

$$(2.48) \qquad q_5(\theta) = \sup_{r>0} E((Z_1 + r)^2 \,/\, Z_1 \leqq -r;\ \theta),$$

$$(2.49) \qquad q_6(\theta) = \sup_{r>0} E((Z_1-r)^2 \,/\, Z_1 \geqq r;\ \theta).$$

Důkaz. Nejprve předpokládejme $E(Z_1;\theta) \neq 0$. Ze vztahu

$$P(b < Q_{N-1} < a;\ \theta) = 1$$

plyne

$$b \geqq E(Q_N/Q_N \leqq b;\theta) = b + E\left[(Z_N+(Q_{N-1}-b))/Z_N \leqq b-Q_{N-1} \quad ;\ \theta\right]$$

$$\gtrless b + q_3(\theta),$$

$$a \leqq E(Q_N/Q_N \geqq a;\theta) \leqq a + q_4(\theta).$$

Vztah (2.44) nyní plyne z (1.30).

Je-li $E(Z_1;\theta^*) = 0$ pak z $b<0<a$ plyne

$$b^2 \leqq E(Q_N^2/Q_N \leqq b;\theta^*) = E((Q_N-b)^2/Q_N \leqq b;\theta^*) +$$

$$+ 2b\ E\left[(Q_N-b)/Q_N \leqq b;\theta^*\right] + b^2 \leqq q_5(\theta^*)+2b\ q_3(\theta^*)+b^2,$$

$$a^2 \leqq E(Q_N^2/Q_N \geqq a;\ \theta^*) \leqq q_6(\theta^*) + 2a\ q_4(\theta^*) + a^2.$$

Vztah (2.47) nyní vyplývá z těchto nerovností a (1.31). ▨

2.3 Příklady

1. Nechť X_i jsou nezávislé stejně rozdělené náhodné veličiny s rozdělením

$$P(X_i = 1) = p, \quad P(X_i = 0) = 1-p, \quad 0 \leq p \leq 1,$$

kde p je parametr. Uvažujme úlohu $H_0: p = p_0$ proti $H_1: p = p_1$, $p_0 < p_1$. S takovouto úlohou se můžeme např. setkat při kontrole jakosti výrobků, které mohou být vadné nebo dobré, p označuje podíl vadných.

Nejprve se zabývejme hraničními případy.
Jestliže $p_0 = 0 < p_1 < 1$, pak na základě Waldova testu $S(b,a)$ po i-tém ($i < n$) kroku přijmeme H_1, jestliže $X_i = 1$, jinak pokračujeme ve výběru; při n_0-tém kroku přijmeme H_1, jestliže $X_{n_0} = 1$ a přijmeme H_0, jestliže $X_{n_0} = 0$; n_0 je nejmenší celé číslo větší nebo rovné $b/\ln(1-p_1)$. Při daných α, β aproximujeme b hodnotou $b^* = \ln\beta$ a za a lze vzít libovolné číslo větší než $\ln(1-p_1)$.
Jestliže $p_0 = 0$, $p_1 = 1$, pak na základě Waldova testu přijmeme H_0, je-li $X_1 = 0$, a přijmeme H_1, je-li $X_1 = 1$.

Waldův test pro případ $0 < p_0 < p_1 < 1$ byl sestaven v 1.2 (viz str. 20). Pro $b < 0 < a$ existuje číslo $t_0(p) > 0$ takové, že $E(\exp\{tN\}; p) < +\infty$ pro vš. $t < t_0(p)$ a vš. $p \in (0,1)$. Operační charakteristika $L(p)$ je klesající na $(0,1)$.
Dále platí

$$E(\exp\{hZ_1(p_0,p_1)\}; p) = p\left(\frac{p_1}{p_0}\right)^h + (1-p)\left(\frac{1-p_1}{1-p_0}\right)^h, \quad 0 \leq p \leq 1,$$

$$E(Z_1(p_0,p_1); p) = \ln\frac{1-p_1}{1-p_0} + p\ln\frac{p_1(1-p_0)}{p_0(1-p_1)}, \quad 0 \leq p \leq 1$$

$$E(Z_1(p_o,p_1);s) = 0$$

$$E(Z_1^2(p_o,p_1);s) = (\ln \frac{1-p_o}{1-p_1})(\ln \frac{p_1}{p_o})$$

kde $s = (\ln \frac{1-p_o}{1-p_1}) \;/\; (\ln \frac{p_1(1-p_o)}{p_o(1-p_1)})$.

Tedy momentová vytvořující funkce náhodné veličiny $Z_1(p_o,p_1)$ existuje a je konečná pro vš. $p\in\langle 0,1\rangle$ a vš. h reálná. Funkci $h(p)$, kterou potřebujeme k výpočtu aproximace operační charakteristiky, najdeme jako řešení rovnice

$$p(\frac{p_1}{p_o})^{h(p)} + (1-p)\,(\frac{1-p_1}{1-p_o})^{h(p)} = 1.$$

Rovnici řešíme numericky. Někdy též volíme různé hodnoty h a k nim hledáme p tak, aby rovnice platila. Z věty o implicitní funkci (viz např. [14]) plyne, že funkce $h(p)$ je klesající a má derivace všech řádů pro $p\in(0,1)$, je tudíž spojitá v bodě $p=s$. Operační charakteristiku můžeme aproximovat následovně:

$$\hat{L}_S(p) = \frac{1-e^{h(p)a}}{e^{h(p)b}-e^{h(p)a}} \quad \text{pro} \quad p\in(0,1),\ p\neq s$$

$$= \frac{a}{-b+a} \quad \text{pro} \quad p=s.$$

Aproximace pro střední rozsah výběru má tvar:

$$\hat{\hat{E}}_S(N;p) = \frac{L_S(p)b + (1-L_S(p))a}{\ln \frac{1-p_1}{1-p_o} + p \ln \frac{p_1(1-p_o)}{p_o(1-p_1)}} \quad \text{pro} \quad p\in(0,1),\ p\neq s,$$

$$= -\frac{a\,b\,\ln \frac{p_1}{p_o}}{\ln \frac{1-p_o}{1-p_1}} \quad \text{pro} \quad p=s,$$

kde s je dáno (1.24).

Pro binomické rozdělení existují tabulky exaktních hodnot operační charakteristiky a středního rozsahu výběru (např. [10]). V následující tabulce si uvedeme exaktní a aproximativní hodnoty (Waldovy) pro operační charakteristiku a střední rozsah výběru pro případ, že hodnoty (a,b,p_o,p_1) jsou vázány následujícími vztahy

$$a = \frac{17}{2} \ln \frac{p_1}{p_o} = -b , \qquad \ln \frac{1-p_o}{1-p_1} = 3/2 \ln \frac{p_1}{p_o} ,$$

což je splněno např. při $p_o=0,5$; $p_1=0,708$; $a=-b=2,957$.

Tabulka 1

p	$L(p)$	$\hat{L}(p)$	$E(N,p)$	$\hat{\hat{E}}(N;p)$
0,45	0,9868	0,9853	23,16	22,00
0,50	0,9456	0,9424	31,83	30,08
0,60	0,4953	0,5000	51,63	48,17
0,70	0,0432	0,0492	31,85	30,65

2. (Pokračování příkladu 1., str.48). Připomeňme si kritickou nerovnost Waldova testu $S(b,a)$ pro tento případ:

$$\left(b+\frac{\mu_1^2-\mu_o^2}{2}n\right)\frac{1}{\mu_1-\mu_o} < \sum_{i=1}^{n} X_i < \left(a+\frac{\mu_1^2-\mu_o^2}{2}n\right)\frac{1}{\mu_1-\mu_o} .$$

Je-li $b<0<a$, existuje $t_o(\mu)>0$ takové, že $E(e^{tN};\mu)<+\infty$ pro vš. $t\leq t_o(\mu)$ a vš. $\mu\in R^1$. Operační charakteristika $L(\mu)$ je klesající.

Dále platí

$$E(\exp\{h\ Z_1(\mu_o,\mu_1)\};\mu) = \exp\left\{\frac{(\mu_1-\mu_o)^2}{2}\,h\left(h-\frac{\mu_1+\mu_o-2\mu}{\mu_1-\mu_o}\right)\right\}$$

$$h,\mu\in R^1 ,$$

$$E(Z_1(\mu_0,\mu_1);\mu) = (\mu_1-\mu_0)\left(\mu - \frac{\mu_1+\mu_0}{2}\right), \qquad \mu \in R^1 ,$$

$$E(Z_1(\mu_0,\mu_1);\mu) = 0 \qquad \text{pro} \quad \mu = \frac{\mu_1+\mu_0}{2} ,$$

$$E(Z_1^2(\mu_0,\mu_1);\mu) = (\mu_1-\mu_0)^2 \qquad \text{pro} \quad \mu = \frac{\mu_1+\mu_0}{2}$$

$$h(\mu) = \frac{\mu_1+\mu_0-2\mu}{\mu_1-\mu_0} .$$

Tudíž

$$\hat{L}(\mu) = \frac{e^{-(\mu_1+\mu_0)} - e^{-2\mu a'}}{e^{-2\mu b} - e^{-2\mu a'}} , \quad \mu \neq \frac{\mu_1+\mu_0}{2} ,$$

$$= \frac{a}{a-b} , \qquad \mu = \frac{\mu_1+\mu_0}{2} ,$$

$$\hat{E}(N;\mu) = \frac{b\ L(\mu) + a(1-L(\mu))}{(\mu_1-\mu_0)\left(\mu - \frac{\mu_1+\mu_0}{2}\right)} , \quad \mu \neq \frac{\mu_1+\mu_0}{2}$$

$$= -\frac{a\ b}{(\mu_1-\mu_0)^2} , \qquad \mu = \frac{\mu_1+\mu_0}{2}$$

kde $a' = a/(\mu_1-\mu_0)$, $b' = b/(\mu_1-\mu_0)$.

Podobně jako u předchozího příkladu jsou známy i pro tento případ exaktní hodnoty $L(\mu)$.

V následující tabulce č.2 jsou uvedeny exaktní a aproximativní hodnoty $L(\mu)$ a $E(N;\mu)$ pro $b' = -2{,}5$, $a' = 7{,}5$ (ozn. $\theta = \mu - \frac{\mu_1+\mu_0}{2}$).

Tabulka 2

θ	$L(\mu)$	$\hat{L}(\mu)$	EN	$\hat{\hat{EN}}$
-1,00	1,000	1,000	3,37	2,50
-0,75	1,000	1,000	4,39	3,33
-0,50	0,999	0,999	6,43	4,99
-0,25	0,986	0,983	11,97	9,32
0,00	0,724	0,750	25,17	18,75
0,25	0,211	0,282	23,16	18,73
0,50	0,046	0,082	15,41	13,36
0,75	0,009	0,024	10,91	9,69
1,00	0,002	0,007	8,35	7,43

3. Nechť $\{X_i\}_{i=1}^{\infty}$ je posloupnost nezávislých stejně rozdělených náhodných veličin s $N(\mu, \sigma^2)$. Uvažujme úlohu testovat $H_0: \sigma^2 = \sigma_0^2$ proti $H_1: \sigma^2 = \sigma_1^2$, $0<\sigma_0^2<\sigma_1^2<+\infty$. Nejprve předpokládejme μ známé. Kritická nerovnost Waldova testu $S(b,a)$ má tvar:

$$h_b - n\,s < \sum_{i=1}^{n} (X_i - \mu)^2 < h_a + n\,s,$$

kde

$$(2.50) \quad h_b = \frac{2b}{\sigma_0^{-2} - \sigma_1^{-2}}, \quad h_a = \frac{2a}{\sigma_0^{-2} - \sigma_1^{-2}}, \quad s = \frac{2\ln(\sigma_1/\sigma_0)}{\sigma_0^{-2} - \sigma_1^{-2}}.$$

Při $b<0<a$ je $E(e^{tN}; \sigma^2)$ pro $t \leq t_0(\sigma^2)$, $t_0^2(\sigma^2)>0$. Operační charakteristika je klesající. Momentová vytvořující funkce $Z_1(\sigma_0^2, \sigma_1^2)$ je konečná a funkce $h(\sigma^2)$ vyhovuje rovnici

$$\sigma^2 = \frac{1 - (\sigma_0^2/\sigma_1^2)^{h(\sigma^2)}}{(\sigma_0^{-2} - \sigma_1^{-2})\,h(\sigma^2)}.$$

Funkce $h(\sigma^2) = 0$ pro $$\sigma^2 = \frac{2\ln(\sigma_1/\sigma_0)}{\sigma_0^{-2} - \sigma_1^{-2}} .$$

Dále platí

$$E(Z_1(\sigma_0^2, \sigma_1^2); \sigma^2) = 1/2\, \sigma^2(\sigma_0^{-2} - \sigma_1^{-2}) - \ln \frac{\sigma_1}{\sigma_0} ,$$

$$E(Z_1^2(\sigma_0^2, \sigma_1^2); \sigma^2) = 2 \ln^2\left(\frac{\sigma_1}{\sigma_0}\right) , \qquad \sigma^2 = \frac{2\ln(\sigma_1/\sigma_0)}{\sigma_0^{-2} - \sigma_1^{-2}} .$$

Odtud již snadno vypočteme aproximaci pro $L(\sigma^2)$ a $E(N;\sigma^2)$ podle (2.29-30) resp. (2.36-37).

Nyní uvažujme případ μ neznámého. Pak můžeme použít následujícího postupu. Zavedeme si nové náhodné veličiny

$$Y_i = \frac{\sum_{j=1}^{i} X_j - i\, X_{j+1}}{i(i+1)} , \qquad i=1,2,\dots;$$

jsou nezávislé stejně rozdělené $N(0, \sigma^2)$ a platí

$$(2.51) \quad \sum_{i=1}^{n} Y_i^2 = \sum_{i=1}^{n+1} (X_i - \bar{X}_{n+1})^2 , \quad \bar{X}_{n+1} = \frac{1}{n+1} \sum_{j=1}^{n+1} X_j , \qquad n=1,2,\dots .$$

Nyní můžeme testovat hypotézu $H_0: \sigma^2 = \sigma_0^2$ proti $H_1: \sigma^2 = \sigma_1^2$ na základě sekvenčního testu s kritickou nerovností

$$h_b + n\, s < \sum_{i=1}^{n} Y_i^2 < h_a + n\, s ,$$

kde h_b, h_a a s jsou definovány (2.50).

Modifikace Waldova testu (useknutý test, test po skupinách)

Waldovým testem useknutým po n_o-tém kroku (ozn. $S_{n_o}(b,a)$) budeme nazývat test, který má pro $n < n_o$ rozhodovací pravidlo shodné s Waldovým testem $S(b,a)$ a v n_o-tém kroku se rozhodneme pro jednu z hypotéz, přičemž předpokládáme $P(N > n_o, \theta) > 0$ pro nějaké $\theta \in (\underline{\theta}, \bar{\theta})$. Pravidla pro rozhodnutí v n_o-tém kroku mohou být různá. Jedno možné pravidlo je uvedeno v příkladu na str. . Někdy se n_o nazývá doba useknutí. Test $S_{n_o}(b,a)$ používáme, pokud máme dán maximálně možný rozsah výběru (např. cena experimentu je vysoká, počet pokusných objektů je omezen, atd.). Pro praktické účely se doporčuje volit $n_o = 3 \max (E(N;\theta_o), E(N;\theta_1))$, kde $E(N;\theta_o)$ a $E(N;\theta_1)$ jsou definovány (2.36). Potom je ve většině případů $P(N \leq n_o, \theta_i) \cong 1$, $i=0,1$.

Nyní si odvodíme aproximaci pro pravděpodobnosti chyb 1. a 2.druhu pro test $S_{n_o}(b,a)$ s následujícím pravidlem pro n_o-tý krok:

a) přijmeme H_o, jestliže $Q_{n_o} \leq 0$;

b) přijmeme H_1, jestliže $Q_{n_o} > 0$.

Označme $L_{n_o}(\theta)$ a $L(\theta)$ operační charakteristiky příslušné $S_{n_o}(b,a)$ resp. $S(b,a)$ a označme $E_{n_o}(N;\theta)$ a $E(N;\theta)$ odpovídající střední rozsahy výběru. Pak platí

$$(2.52) \quad L_{n_o}(\theta) = P(Q_1 \leq b;\theta) + \sum_{n=1}^{n_o} P(b < Q_1 < a, \ldots, b < Q_{n-1} < a, Q_n \leq b; \theta) + P(b < Q_i < a,\ i=1,\ldots,n_o-1, b < Q_{n_o} \leq 0;\theta),$$

$$(2.53)\qquad E_{n_o}(N;\theta) = \sum_{n=1}^{n_o-1} n\, P(N=n;\theta) + n_o\, P(N=n_o;\theta).$$

Pro nepříliš velká n_o lze najít návod pro výpočet aproximací pro $L_{n_o}(\theta)$ a $E_{n_o}(N;\theta)$ v článku [10]. Pro n_o dostatečně velká platí

$$L(\theta)-P(0<Q_{n_o}<a;\theta) \leqq L_{n_o}(\theta) \leqq L(\theta)+P(b<Q_{n_o}\leqq 0;\theta).$$

Je-li $0<var(Z_1;\theta)<+\infty$, plyne z Berry-Essenovy věty (viz např. [19] pro $n_o\to\infty$

$$(2.54)\qquad \left| P(0<Q_{n_o}<a) - \Phi\left(\frac{a-n_o\,E(Z_1;\theta)}{\sqrt{n_o\,var(Z_1;\theta)}}\right) + \Phi\left(\frac{-\sqrt{n_o}\,E(Z_1;\theta)}{\sqrt{var(Z_1;\theta)}}\right)\right| = 0(n_o^{-1/2})$$

$$(2.55)\qquad \left| P(b<Q_{n_o}\leqq 0;\theta) - \Phi\left(\frac{-\sqrt{n_o}\,E(Z_1;\theta)}{\sqrt{var(Z_1;\theta)}}\right) + \Phi\left(\frac{b-n_o\,E(Z_1;\theta)}{\sqrt{var(Z_1;\theta)n_o}}\right)\right| = 0(n_o^{-1/2}).$$

Odtud pak dostáváme přibližnou horní a dolní mez pro $L_{n_o}(\theta)$. Speciálně platí

$$L_{n_o}(\theta_1) \leqq L(\theta_1)+\Phi\left(-\frac{\sqrt{n_o}\,E(Z_1;\theta_1)}{\sqrt{var(Z_1;\theta)}}\right)-\Phi\left(\frac{b-n_o\,E(Z_1;\theta_1)}{\sqrt{n_o\,var(Z_1;\theta_1)}}\right)$$

$$1-L_{n_o}(\theta_o) \leqq 1-L(\theta_o)+\Phi\left(\frac{a-n_o\,E(Z_1;\theta_o)}{\sqrt{n_o var(Z_1;\theta_o)}}\right)-\Phi\left(\frac{-\sqrt{n_o}\,E(Z_1;\theta_o)}{\sqrt{var(Z_1;\theta_o)}}\right),$$

kde obě nerovnosti (vzhledem k (2.54-2.55)) platí pouze přibližně. Pokud se týče $E_{n_o}(N;\theta)$, platí

$$E_{n_o}(N;\theta) \leqq \min(n_o, E(N;\theta)).$$

Nyní obrátíme pozornost k testu po skupinách. Waldovým testem po skupinách (ozn. $S(b,a,\{n_i\}_{i=1}^{\infty})$) budeme rozumět test s následujícím rozhodovacím pravidlem: na základě náhodného výběru $(X_1,\dots,X_{n_k^*})$, $n_k^* = \sum_{i=1}^{k} n_i$,

a) přijmeme H_0, jestliže $Q_{n_k^*} \leqq b$,

b) přijmeme H_1, jestliže $Q_{n_k^*} \geqq a$,

c) jinak pokračujeme v náhodném výběru (tj. přidáváme dalších n_{k+1} náhodných veličin $X_{n_k^*+1},\dots, X_{n_{k+1}^*}$).

Jinými slovy v tomto případě neděláme rozhodnutí po každém pozorování, ale až po dalších n_k. Označme

$$K = \min\left\{ k \; ; \; Q_{n_k^*} \notin (b,a)\right\} .$$

Číslo K nazýváme potřebný počet skupin a $E(K;\theta)$ střední (průměrný) počet skupin. Nejčastěji pracujeme s $n_k=m$, $k=1,2,\dots$. Tento případ budeme nadále uvažovat. Za předpokladu $b<0<a$ test skončí s pravděpodobností 1 a $E(e^{tK};\theta)$ je konečná pro t v okolí 0. Střední počet pozorování je roven $m.E(K;\theta)$ a platí

$$E(N;\theta) \leqq m\, E(K;\theta) \qquad \text{pro} \quad \theta \in (\underline{\theta},\overline{\theta}),$$

kde $E(N;\theta)$ je střední rozsah výběru příslušný $S(b,a)$. Dále lze dokázat pro operační charakteristiku $L^*(\theta)$ následující nerovnosti:

$$1 - L(\theta_0) + L(\theta_1) \gtreqless 1 - L^*(\theta_0) + L^*(\theta_1).$$

Pro výpočet hodnoty jak operační charakteristiky, tak středního počtu skupin lze užít Waldovu aproximaci. V tomto případě je však velmi hrubá.

3. Sekvenční testy pro složené hypotézy

3.1 Úvod

Nechť $\{X_i\}_{i=1}^{\infty}$ je posloupnost nezávislých stejně rozdělených náhodných veličin, X_i má rozdělení dané hustotou $f(x;\theta)$ (vzhledem k nějaké σ-konečné míře μ), $\theta \in \Theta$, Θ je borelovská podmnožina R^k. Uvažujme úlohu testu hypotézy $H_0: \theta \in \omega_0$ proti $H_1: \theta \in \omega_1$, $\omega_0, \omega_1 \subset \Theta$, ω_0, ω_1 mají disjunktní uzávěry, aspoň jedna z množin obsahuje více než jeden bod. Jak bylo řešeno v 1.4 obecně neexistuje stejnoměrně eficientní test ve smyslu definice na str. 30.

Existuje několik metod konstrukce sekvenčních testů pro případ složených alternativ (zahrnujeme též případ tzv. rušivých parametrů). Většina metod je analogií metod užívaných při nesekvenčním přístupu a jejich základem je Waldův test pro případ jednoduchých hypotéz. Metody uvedené v těchto skriptech jsou tohoto typu. Z jiných metod uveďme postup pro získání sekvenčního testu se silou 1 založený na zákonu iterovaného logaritmu (podobně viz např. [18]).

Pro většinu testů získaných metodami popsanými v této kapitole testové statistiky $\{Q_n\}_{n=1}^{\infty}$ již nejsou součtem nezávislých náhodných veličin ani netvoří martingal a tudíž je problém dokázat, že test skončí s pravděpodobností 1 a další vlastnosti. V řadě konkrétních případů (jak uvidíme) lze však vlastnosti odvodit.

Metody konstrukce sekvenčních testů jsou jednak obecné (princip váhových funkcí) jednak metody pro některé typy hypotéz (invariantní testy, testy podílem věrohodnosti, Sobel-Waldův test, atd.)

Máme-li úlohu tzv. jednostranných hypotéz tj. $H_0: \theta \leq \theta_0$ proti $H_1: \theta \geq \theta_1$, $\theta_0 < \theta_1$, obvykle používáme Waldův test pro úlohu $H_0': \theta = \theta_0$ proti $H_1': \theta = \theta_1$.

Je-li $f(x,\theta)$ Darmois-Koopmanův typ rozdělení (viz. str. 14) pak pro úlohu $H_0: \theta = \theta_0$ proti $H_1: |\theta - \theta_0| \geq \delta$, $\delta > 0$ dáno, používáme Sobel-Waldův test (viz 3.4), který je kombinací dvou Waldových testů. Jinak pro tuto úlohu používáme princip vážených funkcí.

V následujících paragrafech se budeme zabývat jednotlivými metodami. Vzhledem k tomu, že při konstrukcích testů budeme vycházet z Waldova testu, budeme u většiny testů uvádět jen posloupnost testových statistik $\{Q_n\}_{n=1}^{\infty}$ a kritické nerovnosti. Dále u statistiky Q_n budeme uvádět definici jen v bodech, kde hustoty náhodného vektoru $(X_1, \ldots, X_n)$ při H_0 a H_1 jsou nenulové, v ostatních bodech definujeme obdobně jako v (1.25-26). Připomeňme, že přijetí jedné z hypotéz vždy znamená ukončení výběru.

3.2 Princip váhových funkcí

Předpokládejme, že $\{X_i\}_{i=1}^{\infty}$ je posloupnost nezávislých stejně rozdělených náhodných veličin, X_i má hustotu $f(x;\theta)$, $\theta \in \Theta \subset R^k$, Θ je borelovská množina. Uvažujme obecnou úlohu testu hypotézy $H_o: \theta \in \omega_o$ proti $H_1: \theta \in \omega_1$, $\omega_o, \omega_1 \subset \Theta$, $\bar{\omega}_o \cap \bar{\omega}_1 = \emptyset$.

Wald navrhl následující metodu konstrukce sekvenčního testu (nazývanou princip váhových funkcí). Zvolíme pravděpodobnosti míry w_o, w_1 definované na borelovských podmnožinách ω_o resp. ω_1 (v této souvislosti se w_o a w_1 nazývají váhové funkce). Definujeme nové hustoty pro $(X_1, \ldots, \ldots, X_n)$ předpisem

$$f_{on}(x_1, \ldots, x_n) = \int_{\omega_o} \prod_{i=1}^{n} f(x_i; \theta) d\, w_o(\theta) \tag{3.1}$$

$$f_{1n}(x_1, \ldots, x_n) = \int_{\omega_1} \prod_{i=1}^{n} f(x_i; \theta) d\, w_1(\theta). \tag{3.2}$$

Tyto hustoty obecně neodpovídají rozdělení n-tice nezávislých náhodných veličin. Definujme

$$Q_n^* = \ln \frac{f_{1n}(X_1, \ldots, X_n)}{f_{on}(X_1, \ldots, X_n)} \tag{3.3}$$

Pro řešení naší úlohy lze použít modifikaci Waloova testu:

na základě $(X_1, \ldots, X_n)$

přijmeme H_o, jestliže $Q_n^* \leq b$,

přijmeme H_1, jestliže $Q_n^* \geq a$,

jinak pokračujeme ve výběru,

kde $b < a$ jsou dané konstanty. Test budeme značit $S(b, a, w_o, w_1)$.

Pro rozsah výběru N platí:

$$N = \min \{ n;\ Q_n^* \notin (b, a) \} .$$

Pokud se týče vlastností tohoto testu, obecně nebylo dokázáno, že test skončí s pravděpodobností 1. Skončí-li však test s pravděpodobností 1, pak při požadavku

$$\int_{\omega_1} P(\text{přij.} H_0 \text{ při } S(b,a,w_0,w_1);\theta)\, dw_1(\theta) \leqq \beta \quad ,$$

$$\int_{\omega_0} P(\text{přij.} H_1 \text{ při } S(b,a,w_0,w_1);\theta)\, dw_0(\theta) \leqq \alpha \quad ,$$

kde $0 < \alpha + \beta < 1$, platí (viz(1.10))

$$\ln \frac{\beta}{1-\alpha} \leqq b, \qquad a \leqq \ln \frac{1-\beta}{\alpha} \quad .$$

Podobně jako u Waldova testu můžeme b,a aproximovat $\ln \frac{\beta}{1-\alpha}$ resp. $\ln \frac{1-\beta}{\alpha}$.

Pokud se týče volby w_0 a w_1, zvolíme buď w_0, w_1 pevně (podle okolností vyplývajících z konkrétní úlohy), nebo hledáme w_0^* a w_1^* ve třídě všech pravděpodobnostních měr definovaných na borelovských podmnožinách ω_0 resp. ω_1 (popř. nějaké podtřídě) tak, aby střední rozsah výběru byl při daném b,a minimální. Někdy se úloha vhodné volby w_0^* a w_1^* formuluje následovně: hledáme w_0^* a w_1^* s vlastností

$$\inf_{w_0,w_1} \sup_{\theta \in \omega_1} P(\text{přij. } H_0 \text{ při } S(b,a,w_0,w_1);\ \theta) =$$

$$= \sup_{\theta \in \omega_1} P(\text{ přij. } H_0 \text{ při } S(b,a,w_0^*,w_1^*);\ \theta) \ ,$$

$$\inf_{w_0,w_1} \sup_{\theta \in \omega_0} P(\text{přij. } H_1 \text{ při } S(b,a,w_0,w_1);\theta) =$$

$$= \sup_{\theta \in \omega_0} P(\text{ přij. } H_1 \text{ při } S(b,a,w_0^*,w_1^*);\ \theta) \ .$$

Řešení v obecném případě neexistuje. Lze je najít ve speciel-ních případech, a i to je velmi obtížné.

Tento princip lze také použít v případě, že X_i má hustotu tvaru $f(x;\theta,\gamma)$, $\theta \in \Theta \subset R^k$, $\gamma \in \Gamma \subset R^m$ a máme úlohu: $H_0:\theta=\theta_0$ proti $H_1:\theta=\theta_1$. Pak volíme pravděpodobnostní míru w na borelovských podmnožinách Γ a použijeme test typově shodný s předchozím se statistikou

$$(3.4) \qquad Q_n^* = \ln \frac{\int_\Gamma \prod_{i=1}^n f(X_i;\theta_1,\gamma)\,dw(\gamma)}{\int_\Gamma \prod_{i=1}^n f(X_i;\theta_0,\gamma)\,dw(\gamma)} \quad .$$

Touto metodou lze dospět např. k tzv. sekvenčnímu t-testu (viz str. 86).

<u>Příklad</u>: Nechť $\{X_i\}^\infty$ jsou nezávislé stejně rozdělené náhodné veličiny s rozdělením $N(\mu,1)$. Mějme úlohu $H_0: \mu=\mu_0$ proti $H_1:\mu=\mu_0+\delta$ nebo $\mu=\mu_0-\delta$. Zvolíme-li $w_1(\mu_0-\delta) = w_1$, $0\leq w_1 \leq 1$, bude test založen na statistikách

$$Q_n^* = -\delta^2/2 + \ln\Big[w_1 \exp\Big\{-\sum_{i=1}^n (X_i-\mu_0)\,\delta\Big\} + (1-w_1)\exp\Big\{\sum_{i=1}^n (X_i-\mu_0)\,\delta\Big\}\Big] \ .$$

Nepřikládáme-li větší význam jedné z hodnot $\mu_0-\delta$, $\mu_0+\delta$, volíme $w_1 = 1/2$.

3.3 <u>Sekvenční invariantní testy</u>

Základní idea sekvenčních invariantních testů se shoduje s nesekvenčními invariantními testy, tj. je-li úloha o testování hypotéz invariantní vůči jistým zobrazením náhodných veličin $(X_1,\dots,X_n)$, hledáme vhodný test ve třídě testů, které jsou invariantní vůči těmto zobrazením. Podrobně se lze s teorií invariantních testů seznámit např. v [16], [15].

Připomeňme si základní pojmy.

Nechť $\{X_i\}_{i=1}^{\infty}$ je posloupnost nezávislých stejně rozdělených náhodných veličin, X_i má hustotu $f(x;\theta)$, $\theta \in \Theta$.

Nechť g je prosté zobrazení z $\mathcal{X}$ na $\mathcal{X}$, kde $\mathcal{X}$ je množina vš.možných hodnot náhodné veličiny X_1 a nechť G je grupa takových zobrazení g.

Řekneme, že _třída hustot_ $\{f(x;\theta);\theta \in \Theta\}$ je _invariantní vůči grupě zobrazení G_, jestliže pro každé $\theta \in \Theta$ a každé $g \in G$ existuje $\theta' \in \Theta$ takové, že

$$(3.5) \qquad \int_{g(x)<y} f(x;\theta)\,d\mu(x) = \int_{x<y} f(x;\theta')\,d\mu(x)$$

pro sk.vš. y reálná

Zobrazení $\bar{g}(\theta) = \theta'$ se nazývá _indukované zobrazení_; indukovaná zobrazení tvoří tzv. _indukovanou grupu_ $\bar{G}$.

Úlohu testu $H_0: \theta \in \omega_0$ proti $H_1: \theta \in \omega_1$ nazveme _invariantní vůči grupě G_, jestliže

$$\bar{g}(\Theta) = \Theta \;, \quad \bar{g}(\omega_0) = \omega_0, \quad \bar{g}(\omega_1) = \omega_1$$

pro vš. $\bar{g} \in \bar{G}$.

Test S vymezený množinami $\{B_i, B_i^0, B_i^1\}_{i=1}^{\infty}$ (viz def.str.15) nazveme _invariantní vůči grupě_ G, jestliže pro vš. n přirozená a vš. $g \in G$ platí:

$$(X_1,\ldots,X_n) \in B_n \iff (g(X_1),\ldots,g(X_n)) \in B_n$$
$$(X_1,\ldots,X_n) \in B_n^j \iff (g(X_1),\ldots,g(X_n)) \in B_n^j \;, \quad j=0,1.$$

Zobrazení T_n definované na $\underbrace{\mathcal{X} \times \ldots \times \mathcal{X}}_{n\times}$ nazveme maximální invariantou vůči grupě G, jestliže

$$T_n(g(x_1),\ldots,g(x_n)) = T_n(x_1,\ldots,x_n) \quad \text{pro vš. } (x_1,\ldots,x_n)$$

a jestliže

$$T_n(x_1,\ldots,x_n) = T_n(y_1,\ldots,y_n)$$

implikuje existenci zobrazení $g \in G$ takového, že

$$g(x_i) = y_i \qquad i=1,\ldots,n.$$

Věta 3.1. Nechť $\{T_n\}_{n=1}^{\infty}$ je posloupnost maximálních invariant vůči grupě zobrazení G.

Test S je invariantní vůči grupě zobrazení G právě, když lze množiny B_n, B_n^0, B_n^1 vyjádřit pomocí T_n, $n=1,2,\ldots$

Důkaz lze najít např. v [15], [16].

Jestliže při nesekvenčním přístupu hledáme testovou statistiku pro úlohu $H_0: \theta \in \omega_0$ proti $H_1: \theta \in \omega_1$ invariantní vůči grupě zobrazení G, vyjdeme z podílu hustot odpovídajících rozdělení maximální invarianty T_n při H_1 a H_0. Jestliže platí

$$(3.6) \qquad \theta \in \omega_0 \iff \lambda(\theta) = \lambda_0$$

$$(3.7) \qquad \theta \in \omega_1 \iff \lambda(\theta) = \lambda_1,$$

kde $\lambda(\theta)$ je maximální invarianta vůči $\bar{G}$ (tj. $\lambda(\bar{g}(\theta)) = \lambda(\theta)$ pro vš. $\bar{g} \in \bar{G}$ a vš. $\theta \in \Theta$ a $\lambda(\theta) = \lambda(\theta') \Rightarrow$ existenci $\bar{g} \in \bar{G}$ takového, že $\bar{g}(\theta) = \theta'$), pak zmíněný podíl hustot vede k stejnoměrně nejsilnějšímu invariantnímu testu.

Nyní se obrátíme k sekvenčnímu řešení problému.
Nechť $\{X_i\}_{i=1}^{\infty}$ je posloupnost nezávislých stejně rozdělených náhodných veličin, X_i má hustotu $f(x,\theta)$, $\theta \in \Theta$.
Nechť $\{f(x,\theta), \theta \in \Theta\}$ je invariantní vůči grupě zobrazení G.
Uvažujme úlohu $H_o: \theta \in \omega_o$ proti $H_1: \theta \in \omega_1$ takovou, že platí (3.6) a (3.7). Složené hypotézy se tedy dají vyjádřit jako jednoduché ovšem v nových parametrech. Můžeme tedy při řešení úlohy vyjít z Waldova testu pro úlohu jednoduchých hypotéz, jestliže místo rozdělení n-tice náhodných veličin vezmeme rozdělení maximální invarianty T_n (vůči grupě obrazení G). Přesněji, položme

$$Q_n = \ln \frac{h_n(T_n; \lambda_1)}{h_n(T_n; \lambda_o)} , \tag{3.8}$$

kde $h_n(t;\lambda)$ je hustota rozdělení T_n při hodnotě maximální invarianty $\lambda(\theta)$ vůči G rovné λ.
Sekvenční test $S_I(b,a)$ pro naši úlohu je pak dán předpisem:
po n-tém kroku
přijmeme H_o, jestliže $Q_n \leqq b$;
přijmeme H_1, jestliže $Q_n \geqq a$;
jinak pokračujeme ve výběru.

Tento test se nazývá <u>Waldův invariantní test</u>.
Stejný test lze použít i pro úlohu $H_o': \lambda \leqq \lambda_o$ proti $H_1: \lambda \geqq \lambda_1$, $\lambda_o < \lambda_1$.
Máme-li předepsány pravděpodobnosti chybných rozhodnutí použijeme pro hodnoty b, a aproximace shodné s aproximací užívanou pro Waldův test (viz str. 34).
Obecně o tomto testu nebylo dokázáno, zda končí s pravděpo-

dobnosti 1 (T_n není obecně součtem nezávislých náhodných veličin). Vlastnosti testu byly odvozeny jen pro některé speciální případy.

Příklad. Chceme testovat $H_o: \sigma^2 \leqq \sigma_o^2$ proti $H_1: \sigma^2 \geqq \sigma_1^2$, $\sigma_o^2 < \sigma_1^2$ v rozdělení $N(\mu, \sigma^2)$, kde μ a σ^2 jsou neznámé parametry. Třída hustot $\{f(x; \mu, \sigma^2), -\infty < \mu < +\infty, \sigma^2 > 0\}$, kde

$$f(x; \mu, \sigma^2) = (2\pi\sigma^2)^{-1/2} \exp\left\{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right\}$$

je invariantní vůči grupě G tvořené zobrazeními

$$g(x) = x + c, \qquad -\infty < c < +\infty .$$

Rovněž naše úloha je invariantní vůči této grupě zobrazení. Indukované zobrazení má tvar

$$\bar{g}(\mu, \sigma^2) = (\mu + c, \sigma^2).$$

Maximální invarianty vůči G jsou

$$T_n(x_1, \ldots, x_n) = (x_1 - x_2, x_2 - x_3, \ldots, x_{n-1} - x_n) \quad n = 2, 3, \ldots .$$

Hustota T_n má tvar

(3.9) $$h_n(t_1, \ldots, t_{n-1}; \sigma^2) =$$

$$= (2\pi\sigma^2)^{-\frac{n-1}{2}} n^{-1/2} \exp\left\{-\frac{v_{n-1}(t_1, \ldots, t_{n-1})}{2\sigma^2}\right\},$$

kde

$$v_{n-1}(t_1, \ldots, t_{n-1}) = n^{-2} \sum_{i=1}^{n} ((n-i)t_i + \ldots t_{n-1} - (t_1 + \ldots + (i-1)t_{i-1}))^2.$$

Přímým výpočtem lze ověřit platnost vztahu

$$v_{n-1}(T_n(x_1,\dots,x_n)) = \sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x}_n)^2 , \tag{3.10}$$

kde $\bar{x}_n = n^{-1} \sum_{i=1}^{n} x_i$.

Maximální invarianta vůči indukované grupě $\bar{G}$ je

$$\lambda(\mu, \sigma^2) = \sigma^2 .$$

Po dosazení (3.9.-10) do (3.8) máme

$$Q_n = (n-1) \ln \frac{\sigma_0}{\sigma_1} + 1/2(\sigma_0^{-2} - \sigma_1^{-2}) \sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x}_n)^2, \ n \geq 2.$$

Test nyní provedeme podle obecného schematu.

Statistiku Q_n lze přepsat následovně:

$$Q_n = \sum_{i=2}^{n} Z_i, \qquad n > 2,$$

$$Z_i = \frac{i-1}{2i} (\sigma_0^{-2} - \sigma_1^{-2})(\bar{x}_{i-1}-x_i)^2 - \ln \frac{\sigma_1}{\sigma_0} .$$

Z_i jsou nezávislé stejně rozdělené náhodné veličiny s konečnou momentovou vytvořující funkcí. Tudíž příslušný test $S_I(b,a)$ má vlastnosti shodné s vlastnostmi Waldova testu.

3.4 Sobel-Waldův test

Předpokládejme, že $\{X_i\}_{i=1}^{\infty}$ je posloupnost nezávislých stejně rozdělených náhodných veličin s rozdělením Darmois-Koopmanova typu (definice viz str. 14). Uvažujme nejprve úlohu diskriminace mezi třemi hypotézami $H_1:\theta = \theta_1$, $H_2:\theta=\theta_2$, $H_3:\theta = \theta_3$, $\theta_1 < \theta_2 < \theta_3$, $\theta_i \in (\underline{\theta}, \bar{\theta})$, $i=1,2,3$.

Připomeňme, že při nesekvenčním přístupu většinou použijeme test:

a) přijmeme H_1, jestliže $\sum_{i=1}^{n} T(X_i) \leqq \underline{T}_n$;

b) přijmeme H_2, jestliže $\underline{T}_n < \sum_{i=1}^{n} T(X_i) \leqq \overline{T}_n$;

c) přijmeme H_3, jestliže $\sum_{i=1}^{n} T(X_i) > \overline{T}_n$,

kde rozsah výběru n, $\underline{T}_n$ a T_n jsou čísla splňující

$$P(\sum_{i=1}^{n} T(X_i) \leqq \underline{T}_n \,;\, \theta_1) \geqq 1 - \gamma_1 ,$$

$$P(\underline{T}_n < \sum_{i=1}^{n} T(X_i) \leqq \overline{T}_n \,;\, \theta_2) \geqq 1 - \gamma_2,$$

$$P(\sum_{i=1}^{n} T(X_i) > \overline{T}_n \,;\, \theta_3) \geqq 1 - \gamma_3 ,$$

$\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ jsou dány.

Při sekvenčním přístupu lze použít tzv. <u>Sobel-Waldův test</u> (ozn. $S(b_1,b_2,a_1,a_2)$) pro úlohu $H_1:\theta = \theta_1$ versus $H_2:\theta = \theta_2$ versus $H_3:\theta = \theta_3$, který je vymezen následujícím pravidlem: na základě náhodného výběru $(X_1,\dots,X_n)$

a) přijmeme H_1, jestliže přijmeme H_1 na základě Waldova testu $S_1(b_1,a_1)$;
b) přijmeme H_2, jestliže H_2 přijmeme na základě Waldových testů $S_1(b_1,a_1)$ a $S_2(b_2,a_2)$;
c) přijmeme H_3, jestliže přijmeme H_3 na základě $S_2(b_2,a_2)$,
d) jinak pokračujeme ve výběru.

Test $S_1(b_1,a_1)$, $b_1 < a_1$, je Waldův test pro $H_1:\theta=\theta_1$ proti $H_2:\theta=\theta_2$ a $S_2(b_2,a_2)$, $b_2 < a_2$, Waldův test pro úlohu $H_2:\theta=\theta_2$ proti $H_3:\theta=\theta_3$.

V dalším budeme používat zkráceného značení : $S = S(b_1, b_2, a_1, a_2)$, $S_1 = S_1(b_1, a_1)$, $S_2 = S_2(b_2, a_2)$ a dále označíme

$$q_j = \ln \frac{C(\theta_{j+1})}{C(\theta_j)} \qquad j = 1,2, \tag{3.11}$$

$$p_j = D(\theta_{j+1}) - D(\theta_j) \qquad j = 1,2. \tag{3.12}$$

Pak lze říci, že podle Sobel-Waldova testu po n-tém kroku

a) přijmeme H_1, jestliže

$$\sum_{i=1}^{n} T(X_i) \leqq \frac{b_1 - n\, q_1}{p_1} \quad ,$$

b) přijmeme H_2, jestliže

$$\frac{a_1 - n\, q_1}{p_1} \leqq \sum_{i=1}^{n} T(X_i) \leqq \frac{b_2 - n\, q_2}{p_2} \quad ,$$

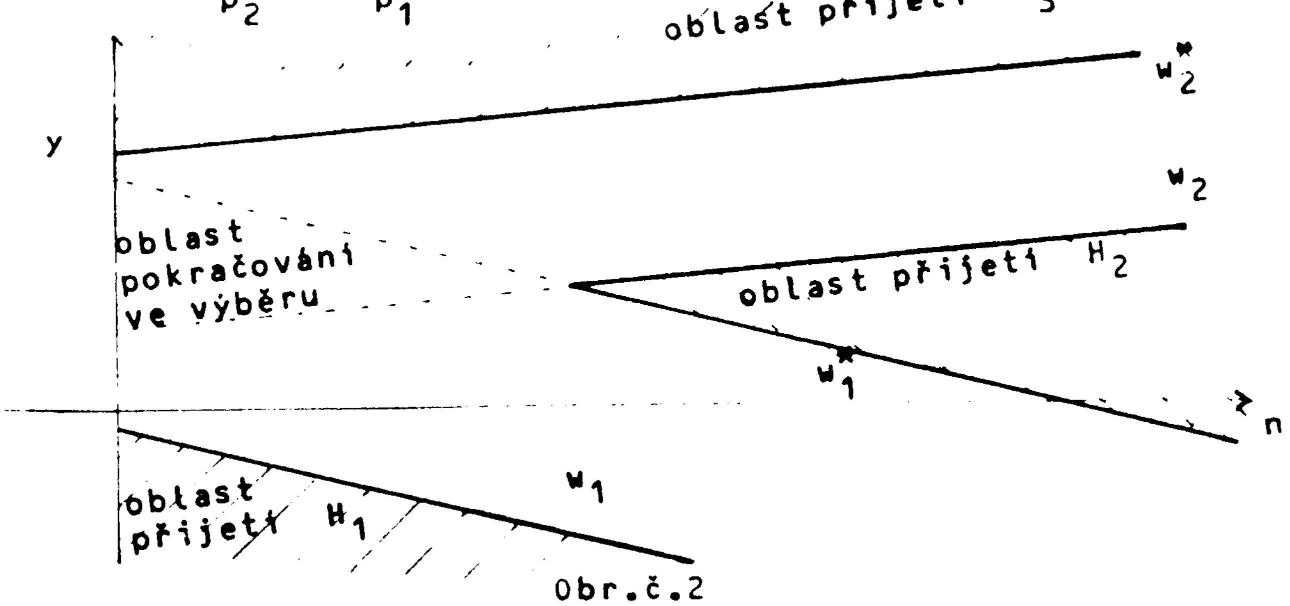
c) přijmeme H_3, jestliže

$$\sum_{i=1}^{n} T(X_i) \geqq \frac{a_2 - n\, q_2}{p_2} \quad ,$$

d) jinak pokračujeme ve výběru.

Odtud je vidět, že je rozumné předpokládat

$$\frac{q_2}{p_2} < \frac{q_1}{p_1} \quad . \tag{3.13}$$



Obr.č.2

Test je graficky znázorněn na obr.č.2. Do grafu postupně vynášíme body $(\sum_{i=1}^{n} T(X_i), n)$. Leží-li pod přímkou w_1, přijímáme H_1, leží-li mezi přímkami w_1^* a w_2, přijímáme H_2, leží-li nad přímkou w_2^*, přijímáme H_3, jinak pokračujeme ve výběru.

Označme P_S(přij. $H_1;\theta$), P_{S_i}(přij. $H_1;\theta$) pravděpodobnosti přijetí hypotézy H_1 při použití testu S resp. S_i, $i=1,2$.
Z vymezení Sobel-Waldova testu S je vidět, že

(3.14) $\quad P_S(\text{přij. } H_1;\theta) = P_{S_1}(\text{přij.} H_1;\theta)$ pro vš. $\theta \in (\underline{\theta},\bar{\theta})$,

(3.15) $\quad P_S(\text{přij. } H_3;\theta) = P_{S_2}(\text{přij.} H_3;\theta)$ pro vš. $\theta \in (\underline{\theta},\bar{\theta})$.

Další vlastnosti testu jsou uvedeny v následující větě:

Věta 3.2. Nechť $b_i < 0 < a_i$, $i=1,2$ pro vš. $\theta \in (\underline{\theta},\bar{\theta})$, nechť platí (3.13) a

(3.16) $\quad P(T(X_1) < \frac{q_1}{p_1};\ \theta) > 0, \quad P(T(X_1) > \frac{q_2}{p_2};\theta) > 0$ pro vš. $\in (\underline{\theta},\bar{\theta})$.

Pak pro každé $\theta \in (\underline{\theta},\bar{\theta})$ existuje $t_0(\theta) > 0$ takové, že pro vš. $t \leq t_0(\theta)$ je $E(e^{tN};\theta) < +\infty$ (N ozn. rozsah výběru při S) a tedy

(3.17) $\quad P_S(\text{přij.} H_1;\theta) + P_S(\text{přij.} H_2;\theta) + P_S(\text{přij.} H_3;\theta) = 1$
pro vš. $\theta \in (\underline{\theta},\bar{\theta})$.

Dále platí

(3.18) $\quad P_S(\text{přij. } H_1;\theta_1) + P_S(\text{přij.} H_2;\theta_2) + P_S(\text{přij.} H_3;\theta_3) > 1.$

Důkaz. První tvrzení plyne z Věty D.5, (3.17) je jeho důsledkem. K důkazu (3.18) použijeme vlastnosti testů S_1 a S_2

(3.14), (3.15).

$$P_{S_1}(\text{přij. } H_1;\ \theta_2) + P_{S_1}(\text{přij. } H_2;\ \theta_1) \quad 1,$$

$$P_{S_2}(\text{přij. } H_2;\ \theta_3) + P_{S_2}(\text{přij. } H_3;\ \theta_2) \quad 1.$$

Vhodnou kombinací těchto vztahů s (3.17) pro $\theta = \theta_2$ obdržíme (3.18). ▨

Z (3.14-15) a faktu, že test S_2 skončí s pravděpodobností 1 , máme

$$(3.19) \qquad P_S(\text{přij. } H_2;\theta) = P_{S_2}(\text{přij. } H_2;\theta) - P_{S_1}(\text{přij. } H_1;\theta) \qquad \theta \in (\underline{\theta},\bar{\theta})$$

Z Waldových aproximací pro operační charakteristiku testů S_1 a S_2 a (3.14), (3.15), (3.19) dostaneme následující aproximace:

$$(3.20) \qquad P_S(\text{přij. } H_1;\ \theta) \cong \frac{e^{a_1 h_1(\theta)} - 1}{e^{a_1 h_1(\theta)} - e^{b_1 h_1(\theta)}}, E(T(X_1);\theta) \neq -\frac{q_1}{p_1}$$

$$(3.21) \qquad P_S(\text{přij. } H_2;\ \theta) \cong \frac{e^{a_2 h_2(\theta)} - 1}{e^{a_2 h_2(\theta)} - e^{b_2 h_2(\theta)}} - \frac{e^{a_1 h_1(\theta)} - 1}{e^{a_1 h_1(\theta)} - e^{b_1 h_1(\theta)}}, \quad E(T(X_1);\theta) \neq -\frac{q_i}{p_i},\ i=1,2$$

$$(3.22) \qquad P_S(\text{přij. } H_3;\ \theta) \cong 1 - \frac{e^{a_2 h_2(\theta)} - 1}{e^{a_2 h_2(\theta)} - e^{b_2 h_2(\theta)}}, \quad E(T(X_1);\theta) \neq -\frac{q_2}{p_2},$$

kde $h_1(\theta)$ a $h_2(\theta)$ jsou funkce splňující

$$h_j(\theta) \neq 0 \qquad E(T(X_1);\theta) \neq -q_j/p_j \qquad j=1,2,$$
$$h_j(\theta) = 0 \qquad E(T(X_1);\theta) = -q_j/p_j \qquad j=1,2,$$

$$E(e^{h_j(\theta)(q_j+p_j\ T(X_1))};\ \theta) = 1.$$

Připomeňme, že

$$(3.23) \qquad h_j(\theta_j) = 1, \qquad h_j(\theta_{j+1}) = -1, \qquad j=1,2.$$

Nyní se zabývejme úlohou stanovit čísla b_1, b_2, a_1, a_2, požadujeme-li

$$(3.24) \qquad P_S(\text{přij. } H_j\ ;\ \theta_j) \geqq 1 - \gamma_j, \qquad j=1,2,3,$$

kde $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ jsou daná čísla ($\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 < 2$). Podobně jako u Waldova testu se spokojujeme s aproximací. Z (3.20-3.23) plyne

$$P_S(\text{přij. } H_1;\ \theta_1) \cong \frac{e^{a_1} - 1}{e^{a_1} - e^{b_1}}$$

$$P_S(\text{přij. } H_2;\ \theta_2) \cong \frac{e^{a_2} - 1}{e^{a_2} - e^{b_2}} - \frac{e^{-a_1} - 1}{e^{-a_1} - e^{-b_1}}$$

$$P_S(\text{přij. } H_3;\ \theta_3) \cong \frac{1 - e^{-b_2}}{e^{-a_2} - e^{-b_2}} \quad .$$

Odtud a z (3.24)(nahradíme-li $\geqq$ rovností) obdržíme aproximaci pro čísla b_1, b_2, a_1, a_2 :

$$(3.25) \qquad b_1^*(\xi) = \ln \frac{\gamma_2 - \xi}{1 - \gamma_1}$$

(3.26) $\quad b_2^*(\xi) = \ln \dfrac{\gamma_3}{1-\xi}$

(3.27) $\quad a_1^*(\xi) = \ln \dfrac{1+\xi-\gamma_2}{\gamma_1}$.

(3.28) $\quad a_2(\xi) = \ln \dfrac{1-\gamma_3}{\xi}$,

kde ξ je libovolné číslo náležející do intervalu $(\max(0,\gamma_1+\gamma_2-1),\ \min(\gamma_2,1-\gamma_3))$. Aproximace čísel b_1,b_2,a_1,a_2 není určena jednoznačně. Doporučuje se volit ξ přibližně ze středu intervalu možných hodnot.

Označme N,N_1,N_2 rozsahy výběru odpovídající testům S,S_1,S_2 a dále N_1^* rozsah výběru testu $S_1^*(b_1,+\infty)$ pro úlohu $H_1:\theta=\theta_1$ proti $H_2:\theta=\theta_2$ a N_2^* rozsah výběru $S_2^*(-\infty,a_2)$ pro úlohu $H_2:\theta=\theta_2$ proti $H_3:\theta=\theta_3$. Pak platí

$$\max(N_1,N_2) \leq N \leq \min(N_1^*,N_2^*)$$

(3.29) $$\max(E(N_1;\theta),E(N_2;\theta)) \leq E(N;\theta) \leq \min(E(N_1^*;\theta),E(N_2^*;\theta)),\quad \theta\in(\underline{\theta},\bar{\theta}).$$

Lepší aproximaci pro $E(N;\theta)$ můžeme obdržet jen ve speciálních případech.

Uvažujme nyní úlohu testovat hypotézu $H_0^*:\theta=\theta_0$ proti alternativě $H_1^*:|\theta-\theta_0|\geq\delta$, $\delta>0$ (při splnění předpokladů uvedených na začátku paragrafu). Při sestavení testu vyjdeme ze Sobel-Waldova testu $S(b_1,b_2,a_1,a_2)$ pro úlohu $H_1:\theta=\theta_0-\delta$, $H_2:\theta=\theta_0$, $H_3:\theta=\theta_0+\delta$. Potom přijímáme H_0^*, jestliže

$$\frac{a_1 - n\, q_1}{p_1} \leq \sum_{i=1}^{n} T(X_i) \leq \frac{b_2 - n\, q_2}{p_2} ,$$

přijímáme H_1^*, jestliže

$$\sum_{i=1}^{n} T(X_i) \leq \frac{b_1 - n\, q_1}{p_1} \quad \text{nebo} \quad \sum_{i=1}^{n} T(X_i) \geq \frac{a_2 - n\, q_2}{p_2} ,$$

jinak pokračujeme ve výběru.

Obvykle požadujeme, aby konstanty b_1, b_2, a_1, a_2 splňovaly

$$P_S(\text{přij. } H_0^*;\ \theta) \geq 1-\alpha$$

(3.30) $$\inf_{\theta, |\theta-\theta_0| \geq \delta} P_S(\text{přij.} H_1^*; \theta) \geq 1-\beta ,$$

kde α, β jsou daná čísla. Vztah je splněn pro test $S(b_1, b_2, a_1, a_2)$, jestliže

$$P_S(\text{přij.} H_1^*; \theta_0 \pm \delta) \geq 1-\beta .$$

Příklad. Nechť $\{X_i\}_{i=1}^{\infty}$ je posloupnost nezávislých stejně rozdělených náhodných veličin s rozdělením $N(\mu, 1)$. Testujeme hypotézu $H_0^*: \mu = \mu_0$ proti $H_1^*: |\mu - \mu_0| \geq \delta$, $\delta > 0$ dané, přičemž požadujeme

$$P(\text{přij. } H_0^*; \theta_0) \geq 1-\alpha$$
$$P(\text{přij. } H_1; \theta_0 - \delta) \geq 1-\alpha$$
$$P(\text{přij. } H_1; \theta_0 + \delta) \geq 1-\alpha ,$$

$0 < \alpha < 2/3$.

Sobel-Waldův test $S(-a_2, a_1, -a_1, a_2)$ je pak dán pravidlem: na základě $(X_1, \ldots, X_n)$ přijmeme H_0^*, jestliže

$$\left|\sum_{i=1}^{n}(X_i - \mu_0)\right| \leq -\frac{a_1}{2\delta} + \frac{n\delta}{2}$$

přijímáme H_1^*, jestliže

$$\left|\sum_{i=1}^{n}(X_i - \mu_o)\right| = \frac{a_2}{2\delta} + \frac{n}{2}\delta ,$$

jinak pokračujeme ve výběru.

Položme-li $\xi = \alpha/2$ v (3.25-3.28) ($\xi \in (\max(0,2\alpha-1),\alpha)$) dostaneme

$$-b_1^*(\alpha/2) = a_2^*(\alpha/2) = \ln\frac{1-\alpha}{\alpha}\quad 2$$

$$-b_2^*(\alpha/2) = a_1^*(\alpha/2) = \ln\frac{1-\alpha/2}{\alpha} .$$

Např. při $\mu_o = 0$, $\delta = 0,1$, $\alpha = 0,05$, $\xi = 0,025$, pak

$$-b_1^*(0,025) = a_2^*(0,025) = 3,376$$
$$-b_2^*(0,025) = a_1^*(0,025) = 2,9704.$$

Tedy H_o^* přijmeme, jestliže

$$\left|\sum_{i=1}^{n}(X_i - \mu_o)\right| \leqq -14,852 + 0,5\,n,$$

a přijmeme H_1^*, jestliže

$$\left|\sum_{i=1}^{n}(X_i - \mu_o)\right| \geqq 18,188 + 0,5\,n,$$

jinak pokračujeme ve výběru. Ze vztahu (3.29) a z Waldových aproximací pro $E(N_i;\theta)$, $E(N_i^*;\theta)$ dostaneme "aproximativní" nerovnosti.

$$661,4 \;\tilde{\leqq}\; E(N;-0,1) \;\tilde{\leqq}\; 727,5$$
$$561 \;\tilde{\leqq}\; E(N;0) \;\tilde{\leqq}\; 769$$
$$1080,5 \;\tilde{\leqq}\; E(N;0,1) \;\tilde{\leqq}\; 1269,6 .$$

Při použití testu s pevným rozsahem dostaneme $n \cong 1299,5$.

3.5 Sekvenční testy pro porovnání parametrů dvou rozdělení

Nechť $\{X_i\}_{i=1}^{\infty}$ a $\{Y_i\}_{i=1}^{\infty}$ jsou nezávislé posloupnosti nezávislých náhodných veličin, X_i a Y_i mají hustotu Darmois-Koopmanova typu tj. hustotu

$$f(x,\xi) = C(\xi)\exp\{T(x)D(\xi)\}\, h(x) \qquad x \in E,\ \xi \in (\underline{\theta},\bar{\theta})$$

resp.

$$f(y;\eta) = C(\eta)\exp\{T(y)D(\eta)\}\, h(y) \qquad y \in E,\ \eta \in (\underline{\theta},\bar{\theta}),$$

$D(.)$ je rostoucí funkce. Testujeme hypotézu $H_o: \xi < \eta$ proti $H_1: \xi > \eta$. Takto formulované hypotézy však nesplňují požadavek, aby množiny parametrů odpovídající H_o a H_1 měly disjunktní uzávěr. Proto od těchto hypotéz přejdeme k H_o', H_1' formulovaným níže, které už tento požadavek splňují. Postupujeme následovně. Sestavíme

$$Q_n' = \sum_{i=1}^{n} \ln \frac{f(X_i,\theta_1)f(Y_i;\theta_o)}{f(X_i,\theta_o)f(Y_i;\theta_1)} =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} (T(X_i)-T(Y_i))(D(\theta_1)-D(\theta_o)),$$

kde $\theta_o = \min(\xi,\eta)$, $\theta_1 = \max(\xi,\eta)$. Za nové hypotézy nyní vezmeme $H_o': D(\eta)-D(\xi) \geq \varepsilon$ a $H_1: D(\xi)-D(\eta) \geq \varepsilon$, kde $\varepsilon > 0$ volíme podle toho, co považujeme za významný rozdíl. Pro test těchto hypotéz použijeme Waldův test založený na $\{Q_n'\}_{n=1}^{\infty}$, kde θ_o a θ_1 splňují $D(\theta_1)-D(\theta_o) = \varepsilon$. Tedy na základě $X_1,\dots,X_n$, $Y_1,\dots,Y_n$ přijmeme H_o', jestliže

$$\sum_{i=1}^{n} (T(X_i) - T(Y_i))\varepsilon \leq b;$$

přijmeme H_1', jestliže

$$\sum_{i=1}^{n}(T(X_i)-T(Y_i))\varepsilon \gtrless a;$$

jinak přecházíme od $X_1,\ldots,X_n$, $Y_1,\ldots,Y_n$ k $X_1,\ldots,X_{n+1}$, $Y_1,\ldots,Y_{n+1}$,

kde b,a jsou dané konstanty.

Vlastnosti tohoto testu lze snadno získat z tvrzení v kapitole 2.

Uvedený postup konstrukce testu lze užít i pro jiné typy rozdělení, ovšem volba hypotéz H_0' a H_1' bude obecně záviset na tvaru rozdělení.

Příklad. Nechť $\{X_i\}_{i=1}^{\infty}$ a $\{Y_i\}_{i=1}^{\infty}$ jsou nezávislé posloupnosti nezávislých náhodných veličin s alternativním rozdělením s parametry p_1 resp. p_2. Chceme testovat hypotézu $H_0: p_1 < p_2$ proti $H_1: p_1 > p_2$.

V praxi odpovídá tato úloha problému z kontroly jakosti. Sledujeme podíl zmetků u dvou výrobních procesů (produkujících týž výrobek). Chceme vybrat proces s menším podílem zmetků. V angličtině je tento problém nazýván "double dichotomie".

Podle obecného schematu sestavíme

$$Q_n' = \sum_{i=1}^{n} (X_i - Y_i) \ln \left(\frac{\theta_1(1-\theta_0)}{\theta_0(1-\theta_1)} \right) .$$

Zvolíme $\varepsilon > 0$ a položíme $\varepsilon = \ln \dfrac{\theta_1(1-\theta_0)}{\theta_0(1-\theta_1)}$.

Test bude mít tvar (b,a dáno): na základě $X_1,\ldots,X_n$, $Y_1,\ldots,Y_n$

přijmeme H_0', jestliže

$$\sum_{i=1}^{n}(X_i - Y_i)\varepsilon \leq b;$$

přijmeme H_1', jestliže

$$\sum_{i=1}^{n}(X_i - Y_i)\varepsilon \geq a;$$

jinak pokračujeme ve výběru.

Pro tento test lze vypočítat přesné hodnoty jak operační charakteristiky tak středního rozsahu výběru (při daných $b < a$), jak vyplyne z následujících úvah.

Jestliže

$$\sum_{i=1}^{n}(X_i - Y_i) = h \quad (h \text{ celé číslo}),$$

pak $\sum_{i=1}^{n+1}(X_i - Y_i)$ může nabýt jen jednu ze tří hodnot $h-1, h, h+1$. Označíme-li N rozsah výběru, pak přijetí H_0' je ekvivalentní s

$$\sum_{i=1}^{N}(X_i - Y_i) = b^*$$

a přijetí H_1' je ekvivalentní s

$$\sum_{i=1}^{N}(X_i - Y_i) = a^*,$$

kde

$$\begin{aligned} a^* &= a/\varepsilon && \text{pro } a/\varepsilon \text{ celé} \\ &= [a/\varepsilon] + 1 && \text{jinak} \\ b^* &= [b/\varepsilon]; \end{aligned}$$

[.] označuje celou část čísla.

Postupujeme-li stejně jako při odvození Waldovy aproximace pro operační charakteristiku (viz str. 41), dostaneme

$$(3.31)\quad L(p_1,p_2) = P(\text{přij. } H_o; p_1,p_2) = \frac{e^{a^* h(p_1,p_2)} - 1}{e^{a^* h(p_1,p_2)} - e^{b^* h(p_1,p_2)}} \qquad p_1 \neq p_2,$$

$$= \frac{a^*}{a^* - b^*} \qquad p_1 = p_2,$$

kde $h(p_1,p_2)$ splňuje

$$h(p_1,p_2) \neq 0 \qquad p_1 \neq p_2$$

$$E(\exp\{h(p_1,p_2)(X_1 - Y_1)\}; p_1,p_2) = 1.$$

Přímým výpočtem obdržíme

$$h(p_1,p_2) = \ln \frac{p_2(1-p_1)}{p_1(1-p_2)} \qquad p_1 \neq p_2 ,$$

a tedy

$$L(p_1,p_2) = \frac{\left(\frac{p_2(1-p_1)}{p_1(1-p_2)}\right)^{a^*} - 1}{\left(\frac{p_2(1-p_1)}{p_1(1-p_2)}\right)^{a^*} - \left(\frac{p_2(1-p_1)}{p_1(1-p_2)}\right)^{b^*}} \qquad p_1 \neq p_2 .$$

Požadujeme-li nyní

$$\sup_{p_1,p_2 \in H_o'} P(\text{přij. } H_o'; p_1,p_2) \geq 1 - \alpha ,$$

$$\sup_{p_1,p_2 \in H_1'} P(\text{přij. } H_1'; p_1,p_2) \geq 1 - \beta ,$$

α, β dány, $\alpha + \beta < 1$ dostaneme po dosazení do (3.31)

$$(3.32)\qquad a^* \geq \varepsilon^{-1} \ln \frac{1-\beta}{\alpha} ,$$

$$(3.33)\qquad b^* \geq \varepsilon^{-1} \ln \frac{\beta}{1-\alpha} .$$

Zde jsme použili faktu, že funkce $L(p_1,p_2)$ jako funkce proměnné $u = \dfrac{p_2(1-p_1)}{p_1(1-p_2)}$ je klesající.

Za a^* a b^* pak volíme nejmenší resp. největší číslo splňující (3.32) resp. (3.33).

Pokud se týče středního rozsahu výběru máme (z 1.Waldovy rovnosti) :

$$E(N;p_1,p_2) = \frac{a^*(1-L(p_1,p_2)) + b^*L(p_1,p_2)}{(p_2-p_1)} \qquad p_1 \neq p_2\,,$$

$$= \frac{-a^*b^*}{2p_1(1-p_1)} \qquad p_1 = p_2\,.$$

3.6 Sekvenční test podílem věrohodnosti

Vyjdeme z předpokladů uvedených na začátku 3.1. Sekvenční test podílem věrohodnosti je analogií testu podílem věrohodnosti při nesekvenčním přístupu (viz např. [26]). Podle ní vezmeme za testovou statistiku (při pevném rozsahu výběru rovném n)

$$Q_n = \ln \frac{\sup\limits_{\theta \in \omega_1} \prod\limits_{i=1}^{n} f(X_i;\theta)}{\sup\limits_{\theta \in \omega_0} \prod\limits_{i=1}^{n} f(X_i;\theta)}\,, \tag{3.34}$$

přičemž malé hodnoty Q_n odpovídají platnosti H_0, velké hodnoty Q_n odpovídají platnosti H_1. Tímto postupem lze získat např. F-statistiku pro úlohu testu platnosti lineární hypotézy v lineárním modelu. Poznamenejme, že zmíněný nesekvenční test má několik variant (např. místo Q_n vezmeme

$$Q_n^* = \ln \frac{\sup\limits_{\theta \in \omega_0} \prod\limits_{i=1}^{n} f(X_i;\theta)}{\sup\limits_{\theta \in \omega_0 \cup \omega_1} \prod\limits_{i=1}^{n} f(X_i;\theta)} \ ).$$

Sekvenčním testem podílem věrohodnosti budeme rozumět test založený na posloupnosti statistik $\{Q_n\}_{n=1}^{\infty}$ daných (3.34) s kritickými nerovnostmi.

$$b_n < Q_n < a_n , \qquad n=1,2,\ldots \quad .$$

V takovéto obecné podobě lze těžko odvodit nějaké vlastnosti. Nebyl vypracován ani postup pro získání aproximací při požadavcích na pravděpodobnosti chybných rozhodnutí.

Bartlett [4] a Cox [8] vyšetřili vlastnosti tohoto testu v následujícím speciálním případě.

Nechť $\{X_i\}_{i=1}^{\infty}$ je posloupnost nezávislých stejně rozdělených náhodných veličin, X_i má hustotu $f(x;\ \theta_1,\theta_2)$, $\theta_1 \in (\underline{\theta}_1,\bar{\theta}_1)$, $\theta_2 \in (\underline{\theta}_2,\bar{\theta}_2)$, vyhovující následujícím podmínkám:

1) existují sk.j. parciální derivace 3.řádu $\dfrac{\partial^3 \ln f(x;\theta_1,\theta_2)}{\partial\theta_1^j\, \partial\theta_2^{3-j}}$

$j=0,1,2,3$ pro vš. $\theta_i \in (\underline{\theta}_i,\bar{\theta}_i)$ $i=1,2;$

2) existuje funkce $g(x)$ taková, že

$$\left| \frac{\partial^k \ln f(x;\theta_1,\theta_2)}{\partial\theta_1^j \ \partial\theta_2^{k-j}} \right| \leq g(x) \qquad \begin{array}{l} j=0,\ldots,k \\ k=1,2,3 \end{array}$$

$E(g(X);\theta_1,\theta_2) \leq C,$ $\quad \theta_1 \in (\underline{\theta}_1,\bar{\theta}_1),\ \theta_2 \in (\underline{\theta}_2,\bar{\theta}_2)$;

kde C je konstanta nezávisející na θ_1,θ_2.

Uvažujme úlohu $H_o: \theta_1 = \theta_{10}$ proti $H_1: \theta_1 = \theta_{11}$, $\theta_{10} < \theta_{11}$, kde rozdíl $\theta_{11} - \theta_{10}$ je malý. Potom testová statistika Q_n má tvar:

$$Q_n = \sum_{i=1}^{n} \ln \frac{f(X_i; \theta_{11}, \hat{\theta}_{2n})}{f(X_i; \theta_{10}, \hat{\theta}_{2n})}, \qquad n=1,2,\ldots ,$$

kde $\hat{\theta}_{2n}$ je maximálně věrohodný odhad parametru θ_2 na základě náhodného výběru $(X_1, \ldots, X_n)$. Sekvenční test s kritickými nerovnostmi

$$b_n < Q_n < a_n, \qquad n=1,2,\ldots$$

označíme $L(\{b_n, a_n\}_{n=1}^{\infty})$.

Bartlett a Cox odvodili tvrzení o tomto testu použitím limitních vlastností maximálně věrohodných odhadů a několikanásobným použitím Taylorova rozvoje (podobně viz [8], [10]). Odvození vlastností však platí jen pro malé $\theta_{11} - \theta_{10}$. Odtud plyne doporučení pro praxi používat test pro $n \geq n_o$, kde $n_o \cong (\theta_{11} - \theta_{10})^{-1}$. Autoři ukázali, že při požadavku, aby pravděpodobnosti chyb 1. a 2. druhu byly menší nebo rovny α resp. β, lze obdržet následující aproximace b_n^*, a_n^* pro hodnoty b, a:

$$b_n^* = c_n \ln \frac{\beta}{1-\alpha},$$

$$a_n^* = c_n \ln \frac{1-\beta}{\alpha},$$

$$c_n^{-1} = 1 - \frac{I^2(\hat{\theta}_{1n}, \hat{\theta}_{2n})}{I(\hat{\theta}_{1n}, \hat{\theta}_{1n}) I(\hat{\theta}_{2n}, \hat{\theta}_{2n})},$$

$$I(\theta, \eta) = -E\left(\frac{\partial^2 \ln f(X_i; \theta, \eta)}{\partial \theta \, \partial \eta}; \quad \theta, \eta\right),$$

kde $\hat{\theta}_{1n}$ a $\hat{\theta}_{2n}$ jsou maximálně věrohodné odhady parametrů θ_1 a θ_2 na základě náhodného výběru $(X_1,\dots,X_n)$.
Dále platí, že pro každé $\varepsilon > 0$ existuje m_0 takové, že pro vš. $m \geq m_0$

$$P(\text{test } L_m(\{b_n,a_n\}_{n=1}^{\infty}) \text{ skončí }) > 1-\varepsilon,$$

kde index m označuje, že s ověřováním kritické nerovnosti začneme až při výběru $(X_1,\dots,X_m)$. Aproximace operační charakteristiky a středního rozsahu výběru testu $L(\{b_n^*,a_n^*\}_{n=1}^{\infty})$ se shoduje s aproximacemi pro Waldův test $S(\ln\frac{\beta}{1-\alpha},\ln\frac{1-\beta}{\alpha})$ pro úlohu $H_0:\theta=\theta_{10}$ proti $H_1:\theta=\theta_{11}$, kde θ je střední hodnota normálního rozdělení s rozptylem

$$A^2 = \frac{I(\theta_2,\theta_2)}{I(\theta_2,\theta_2)I(\theta_1,\theta_1)-I^2(\theta_1,\theta_2)} \tag{3.35}$$

(viz str.50).

K odvození zmíněných vlastností bylo použito následujících tvrzení (plynoucích z předpokladů) :

a) pro každé $\varepsilon > 0$ a $\delta > 0$ existuje n_0 takové, že pro vš. $n \geq n_0$
$P($ existují maximálně věrohodné odhady $\hat{\theta}_{1n},\hat{\theta}_{2n}$ splňující $|\hat{\theta}_{in}-\theta_i| < \varepsilon$, $i=1,2;$ $\theta_1,\theta_2) > 1-\varepsilon$;

b) $I(\theta_i,\theta_j)$ je spojitou funkcí θ_i,θ_j;

c) $Q_n = \left((\theta_{11}-\theta_{10})\ I(\theta_1,\theta_1)n(\hat{\theta}_{1n}-\frac{\theta_{11}+\theta_{10}}{2})\right)\left(1+0_p(n^{-1/2})\right),$
pro $n\to\infty$, kde $0_p(n^{-1/2})$ označuje:

$$Y_n = 0_p(n^{-1/2}) \iff \underset{\varepsilon>0}{\forall}\ \underset{K>0}{\exists}\ \underset{n_0}{\exists}\ \underset{n\geq n_0}{\forall}$$

$$P(|Y_n\, n^{+1/2}| \geq K) < \varepsilon \quad .$$

d) $\sqrt{n}(\hat{\theta}_{1n} - \theta_1)$ má asymptoticky $N(0, A^2)$, kde A^2 je dáno (3.35).

Z c) je vidět, že test pro naši úlohu bychom mohli též založit na maximálně věrohodných odhadech, tj. test by měl kritickou nerovnost:

$$b_n^* < (\theta_{11}-\theta_{10})\,I(\theta_1,\theta_1)\,n\left(\hat{\theta}_{1n} - \frac{\theta_{11}+\theta_{10}}{2}\right) < c_n^*,\ n^{1/2}(\theta_{11}-\theta_{10})^{-1} \quad .$$

4. Sekvenční testy odpovídající některým klasickým testům

4.1 Úvod

V paragrafech 4.2.-4.4 jsou uvedeny sekvenční analogie nejznámějších klasických testů - t-testu, F-testu, testu o korelačním koeficientu.

V paragrefu 4.5 jsou uvedeny dva nejužívanější neparametrické sekvenční testy - sekvenční znaménkový a sekvenční jednovýběrový Wilcoxonův test.

Poslední paragraf se týká sekvenčních testů životnosti.

Všechny testy uvedené v této kapitole mají několik společných vlastností. Uvedeme si je zde přehledně a nebudeme je již uvádět v jednotlivých paragrafech. Testy skončí s pravděpodobností 1, kromě testu uvedeného v 4.4 jsou všechny testy zadány kritickými nerovnostmi; požadujeme-li, aby pravděpodobnosti chybných rozhodnutí byly shora omezeny čísly α resp. β ($\alpha + \beta < 1$), lze hodnoty b,a aproximovat obvyklým způsobem tj. $\ln \frac{\beta}{1-\alpha}$ resp. $\ln \frac{1-\beta}{\alpha}$.

Poznamenejme, že sekvenční analogie nesekvenčních testů nejsou dány jednoznačně.

4.2 Sekvenční t-test

Nechť $\{X_i\}_{i=1}^{\infty}$ je posloupnost nezávislých stejně rozdělených náhodných veličin s rozdělením $N(\mu, \sigma^2)$, $-\infty < \mu < +\infty$, $\sigma^2 > 0$ jsou neznámé parametry. Uvažujme úlohu $H_0: \mu/\sigma = \lambda_0$ proti $H_1: \mu/\sigma = \lambda_1$, $\lambda_0 < \lambda_1$.

K sekvenčnímu testu (jednostrannému t-testu) pro tuto úlohu lze dospět dvěma způsoby (sekvenční invariantní test, princip váhových funkcí).

Nejprve sestavíme test na základě metody popsané v 3.3 (sekvenční invariantní testy). Naše úloha je invariantní vůči změně měřítka, tj. vůči grupě G zobrazení tvaru:

$$g(x) = g(cx), \qquad c > 0.$$

Indukované zobrazení $\bar{g}$ má tvar :

$$\bar{g}(\mu, \sigma^2) = (c\mu, c^2\sigma^2), \qquad c > 0,$$

a maximální invarianta vůči grupě $\bar{G}$ indukovaných zobrazení je

$$\lambda(\mu, \sigma^2) = \mu/\sigma \quad .$$

Maximální invarianta vůči grupě G (založená na náhodných veličinách $X_1,\dots,X_n$)

$$T_n(x_1,\dots,x_n) = (x_1/|x_n|,\dots,x_n/|x_n|)$$

má hustotu tvaru

$$h_n(w_1,\dots,w_n;\lambda) = (2\pi\sigma^2)^{-n/2}\int_0^{+\infty} z^{n-1}\exp\left\{-\sum_{i=1}^{n}\frac{(zw_i-\lambda\sigma)^2}{2\sigma^2}\right\}dz=$$

$$=(2\pi\sum_{i=1}^{n} w_i^2)^{-n/2} \exp\left\{-\frac{\lambda^2(n-v^2)}{2}\right\} \int_0^{+\infty} z^{n-1} \exp\left\{\frac{(z-\lambda v)^2}{2}\right\} dz,$$

kde $-\infty < w_i < +\infty$, $i=1,\dots,n-1$, $w_n = \pm 1$,

$$(4.1) \qquad v_n = \sum_{i=1}^{n} w_i (\sum_{j=1}^{n} w_j^2)^{-1/2} = \sum_{i=1}^{n} x_i (\sum_{j=1}^{n} x_j^2)^{-1/2} .$$

Podle schematu pro sestavení sekvenčního invariantního testu obdržíme testové statistiky

$$(4.2) \qquad Q_n = -(\lambda_1^2 - \lambda_0^2) \frac{n-v_n^2}{2} +$$

$$+ \ln \left(\frac{\int_0^{+\infty} z^{n-1} \exp\left\{-\frac{(z-\lambda_1 v_n)^2}{2}\right\} dz}{\int_0^{+\infty} z^{n-1} \exp\left\{-\frac{(z-\lambda_0 v_n)^2}{2}\right\} dz} \right) , \quad n=2,3,\dots,$$

kde v_n je dáno (4.1) a kritické nerovnosti

$$b < Q_n < a \quad , \quad n=2,3,\dots, \quad b < a.$$

Tento test budeme nazývat (jednostranným) sekvenčním t-testem (ozn. $T(b,a)$). Stejný test lze použít i pro další úlohy, např. H_0': $\mu/\sigma \leqq \lambda_0$ proti H_1': $\mu/\sigma \geqq \lambda_1$, $\lambda_0 < \lambda_1$.

K témuž testu můžeme dospět i na základě principu váhových funkcí. Položíme-li pro $i=1,2$

$$\frac{\partial w_{i,k}(\mu, \sigma^2)}{\partial \sigma} = \frac{1}{2\sigma \ln k}, \ \mu = \lambda_i \sigma , \quad k^{-1} < \sigma < k,$$

$$= 0 \ \text{jinak},$$

dostaneme podle (3.3)

$$Q_{n,k} = \ln \frac{\int_{k^{-1}}^{k} (2\pi \sigma^2)^{-n/2}\, e^{-\sum_{i=1}^{n} \frac{(X_i - \mu)^2}{2\sigma^2}}\, w_{1,k}(\mu, \sigma^2)\, d\sigma}{\int_{k^{-1}}^{k} (2\pi \sigma^2)^{-n/2}\, e^{-\sum_{i=1}^{n} \frac{(X_i - \mu)^2}{2\sigma^2}}\, w_{o,k}(\mu, \sigma^2)\, d\sigma} =$$

(4.3)

$$= \ln \frac{\int_{k^{-1}}^{k} \sigma^{-n-1} \exp\left\{- \sum_{i=1}^{n} (X_i - \lambda_1 \sigma)^2 / 2\sigma^2\right\} d\sigma}{\int_{k^{-1}}^{k} \sigma^{-n-1} \exp\left\{- \sum_{i=1}^{n} (X_i - \lambda_o \sigma)^2 / 2\sigma^2\right\} d\sigma} .$$

Pak platí

$$\lim_{k \to \infty} Q_{n,k} = Q_n,$$

kde Q_n je dáno (4.2). Tedy rovněž dospíváme k sekvenčnímu t-testu. Poznamenejme, že v literatuře se někdy sekvenčním t-testem nazývá test založený na posloupnosti statistik

$$Q_n^{*} = \ln \frac{\int_{0}^{+\infty} \sigma^{-n} \exp\left\{- \sum_{i=1}^{n} (X_i - \lambda_1 \sigma)^2 / 2\sigma^2\right\} d\sigma}{\int_{0}^{+\infty} \sigma^{-n} \exp\left\{- \sum_{i=1}^{n} (X_i - \lambda_o \sigma)^2 / 2\sigma^2\right\} d\sigma}, n=2,3,\dots$$

Pro výpočet Q_n lze použít následující vyjádření:

$$Q_n = - \frac{n}{2}(\lambda_1^2 - \lambda_o^2) + \ln \Big\{ M(\tfrac{n}{2}, \tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2} \lambda_1^2 v_n^2) + \lambda_1 v_n \sqrt{2} \,.$$

$$\frac{\Gamma((n+1)/2)}{\Gamma(n/2)} M(\frac{n+1}{2}, 3/2, \frac{1}{2} \lambda_1^2 v_n^2)\Big\} -$$

$$- \ln\left\{M\left(\frac{n}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\lambda_o^2 v_n^2\right) + \lambda_o v_n \sqrt{2}\,\frac{\Gamma((n+1)/2)}{\Gamma(n/2)}\,.\right.$$

$$\left. .\, M\left(\frac{n+1}{2}, 3/2, \frac{1}{2}\lambda_o^2 v_n^2\right)\right\} ,$$

kde

$$(4.4) \quad M(\alpha, \gamma; z) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\alpha+j)\,\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\gamma+j)\,\Gamma(\alpha)}\,\frac{z^j}{j!}, \quad z \geqq 0,\ \alpha > 0, \gamma > 0,$$

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{+\infty} e^{-x}\, x^{\alpha-1}\, dx, \qquad \alpha > 0.$$

Funkce $M(\alpha, \gamma, z)$ je tabelována např. v [20]. Nemáme-li k dispozici tabulky, můžeme použít následující aproximaci (vyplývající ze Stirlingovy formule):

$$Q_n = -\frac{1}{4}(\lambda_1^2 - \lambda_o^2)(2n - v_n^2) + \frac{1}{4} v_n\left(\lambda_1\sqrt{4n + \lambda_1^2 v_n^2} - \right.$$

$$\left. - \lambda_o\sqrt{4n + \lambda_o^2 v_n^2}\right) + n \ln \frac{\lambda_1 v_n + \sqrt{4n + \lambda_1^2 v_n^2}}{\lambda_o v_n + \sqrt{4n + \lambda_o^2 v_n^2}} + O\left(\frac{v_n}{\sqrt{n}}\right) .$$

Pro úlohu $H_o: \mu/\sigma = \lambda_o$ proti $H_1: |\mu/\sigma - \lambda_o| \geqq \delta$, $\delta > 0$ dáno, použijeme tzv. dvoustranný sekvenční t-test. Budeme jím rozumět test (ozn. $T'(b,a)$) s kritickými nerovnostmi

$$b < Q_n' < a \quad , \qquad n = 2, 3, \ldots$$

kde

$$Q_n' = \ln \frac{\frac{1}{2}\int_0^{+\infty} y^{-n-1}\left[\exp\left\{-\frac{1}{2y^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i - (\mu_o - \delta)y)^2\right\} + \exp\left\{-\frac{1}{2y^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i - (\mu_o + \delta)y)^2\right\}\right] dy}{\int_0^{+\infty} y^{-n-1}\exp\left\{-\frac{1}{2y^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \mu_o y)^2\right\} dy}$$

$$= \frac{-n\,\delta^2}{2}\, M\left(\frac{n}{2}, \frac{1}{2}; \frac{\delta^2 u_n^2}{2}\right), \qquad n=2,3,\dots ,$$

$$u_n = \sum_{i=1}^{n} (x_i - \mu_0)\left(\sum_{j=1}^{n} (x_j - \mu_0)^2\right)^{-1/2},$$

$M(\alpha, \gamma; z)$ je dáno (4.4).

Pro provedení testu lze využít buď tabulek funkce $M(\alpha, \gamma; z)$ v [20] nebo tabulek hodnot z, které jsou řešením rovnice

$$L = \ln M\left(\frac{n}{2}, \frac{1}{2}, \frac{\delta^2 z^2}{2}\right) - \frac{\delta^2 n}{2} ,$$

kde L, n, δ je dáno (viz [22]).

4.3 Sekvenční F-test

Sekvenční F-test si vyložíme jen pro základní hypotézu jednoduchého třídění. Sekvenční F-test pro základní hypotézy dvojného třídění i dalších modelů analýzy rozptylu (se stejným počtem pozorování v každé podtřídě) má podobný tvar (podrobně viz [10]).

Nechť $\{(x_{1i}, \dots, x_{ki})\}_{i=1}^{\infty}$ je posloupnost nezávislých k-rozměrných náhodných vektorů s rozdělením $N(\mu, \sigma^2 I_k)$, kde $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_k)'$, $\sigma^2 > 0$ jsou neznámé parametry, I_k je jednotková matice $k \times k$. Uvažujme úlohu $H_0: \sigma^{-2} \sum_{j=1}^{k} (\mu_j - \bar{\mu})^2 \leq \lambda_0^2$, $\bar{\mu} = \frac{1}{k} \sum_{j=1}^{k} \mu_j$, proti $H_1: \sigma^{-2} \sum_{j=1}^{k} (\mu_j - \bar{\mu})^2 \geq \lambda_1^2$, $\lambda_0^2 < \lambda_1^2$. K testu této hypotézy použijeme <u>sekvenční F-test</u>, který je dán následujícími kritickými nerovnostmi:

$$b < Q_{Fn} < a, \qquad n=2,3,\dots \tag{4.5}$$

$$(4.6) \qquad Q_{Fn} = -\frac{n}{2}(\lambda_1^2 - \lambda_o^2) + \ln M\left(\frac{kn-1}{2}, \frac{k-1}{2}; \frac{n\lambda_1^2 q_n}{2(1+q_n)}\right) - \ln M\left(\frac{kn-1}{2}, \frac{k-1}{2}; \frac{n\lambda_o^2 q_n}{2(1+q_n)}\right),$$

kde $M(\alpha, \alpha', z)$ je dáno (4.4) a

$$q_n = \frac{n\sum_{j=1}^{k}(\bar{X}_{j(n)} - \bar{X}_n)^2}{\sum_{j=1}^{k}\sum_{i=1}^{n}(X_{ji} - \bar{X}_{j(n)})^2},$$

$$\bar{X}_n = \sum_{j=1}^{k}\bar{X}_{j(n)}k^{-1}, \quad \bar{X}_{j(n)} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_{ji}.$$

K tomuto testu lze dospět metodou vyloženou v 3.3. Poznamenejme, že statistika q_n je až na konstantu rovna F-statistice užívané pro test hypotézy $H_o': \mu_i = \mu_1 \quad i=1,\dots,k$ v modelu jednoduchého třídění při nesekvenčním přístupu (v každé podtřídě je právě n pozorování).

Statistika Q_{Fn} je rostoucí funkcí q_n, tudíž sekvenční F-test lze zadat též nerovnostmi

$$(4.7) \qquad \underline{q}_n < q_n < \bar{q}_n, \qquad n > 1,$$

kde $\underline{q}_n$ a $\bar{q}_n$ jsou řešení rovnic $Q_{Fn}(\underline{q}_n) = b$, $Q_{Fn}(\bar{q}_n) = a$, tj. po n-tém kroku přijímáme H_o, jestliže $q_n \leq \underline{q}_n$, přijímáme H_1, jestliže $q_n \geq \bar{q}_n$, jinak pokračujeme ve výběru.

Aproximativní hodnoty pro $\underline{q}_n$ a $\bar{q}_n$ jsou uvedeny v tabulce.

Tabulka aproximací pro g_n a $\bar{q}_n$ je-li $\lambda_0=0$, $\lambda_1=k$, $\alpha=\beta=0{,}05$

	n	2	3	4	5	6	7
k=2	q_n^*	-	0.0038	0.0523	0.0826	0.1053	0.1207
	q_n^*	-	15.307	2.394	1.385	1.016	0.8254

		8	9	10	15	20	50
k=2	q_n^*	0.1351	0.1453	0.1549	0.1836	0.1980	0.2282
	q_n^*	0.7102	0.6446	0.5776	0.4392	0.3825	0.2967

	n	2	3	4	5	6	7
k=5	q_n^*	0.2701	0.3313	0.3412	0.3397	0.3347	0.3312
	q_n^*	-	2.469	1.337	0.9730	0.7920	0.6871

	n	8	9	10	15	20	50
k=5	q_n^*	0.3255	0.3221	0.3177	0.3031	0.2940	0.2725
	q_n^*	0.6255	0.5651	0.5273	0.4250	0.3791	0.3022

K provedení testu lze vyjít z nerovnosti (4.7) a použít tabulku pro g_n a $\bar{q}_n$ nebo vyjít z nerovnosti (4.5) a použít tabulky funkce $M(\alpha, \alpha', z)$ v [20].

Při provádění konkrétního testu je třeba si uvědomit, že při n-tém kroku realizujeme k-tici nezávislých pozorování $X_{1n}, \dots,$ $\dots, X_{kn}$; X_{in} má rozdělení $N(\mu_i, \sigma^2)$.

Závěrem poznamenejme, že obdobně jako sekvenční t-test i sekvenční F-test má několik variant (viz např. [10]).

4.4 Sekvenční test o korelačním koeficientu

Nechť $\{(X_i, Y_i)\}_{i=1}^{\infty}$ je posloupnost nezávislých náhodných vektorů s dvourozměrným normálním rozdělením s hustotou:

$$f(x,y;\mu_1,\mu_2,\sigma_1,\sigma_2,\rho) = (2\pi\sigma_1\sigma_2(1-\rho^2)^{1/2})^{-1} \cdot$$

$$\cdot \exp\left\{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2} - 2\rho\frac{(x-\mu_1)(y-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2} + \frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}\right]\right\},$$

kde $-\infty<\mu_1<+\infty$, $-\infty<\mu_2<+\infty$, $\sigma_1^2>0$, $\sigma_2^2>0$, $-1<\rho<1$, jsou neznámé parametry. Uvažujme úlohu $H_o: \rho=\rho_o$ proti $H_1: \rho=\rho_1$, $-1<\rho_o<\rho_1<1$. Úloha je invariantní vůči grupě zobrazení tvaru:

$$g(x,y) = (c_1x+c_1', c_2y+c_2')', \qquad c_i>0,\ -\infty<c_i'<+\infty,\ i=1,2.$$

Metodou popsanou v 3.3 lze dospět k sekvenčnímu testu invariantnímu vůči zmíněným zobrazením. Tento test je dán kritickými nerovnostmi

$$(4.8) \qquad b<Q_{\rho n}<a, \qquad n=3,4,\dots,$$

kde

$$(4.9) \qquad Q_{\rho n} = \frac{n-1}{2}\ln\frac{1-\rho_1^2}{1-\rho_o^2} - \left(n-\frac{3}{2}\right)\ln\frac{1-\rho_1 r_n}{1-\rho_o r_n} + $$

$$+ \ln\frac{F\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},n-1/2;\frac{1+\rho_1 r_n}{2}\right)}{F\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},n-1/2;\frac{1+\rho_o r_n}{2}\right)}$$

$$F(\alpha,\alpha',\alpha'';z) = \sum_{j=o}^{\infty}\frac{\Gamma(\alpha+j)\,\Gamma(\alpha'+j)\,\Gamma(\alpha'')}{\Gamma(\alpha)\,\Gamma(\alpha')\,\Gamma(\alpha''+j)}\,\frac{z^j}{j!},\quad \alpha>0,\ \alpha'>0,\ \alpha''>0,\quad 0<z<1,$$

$$r_n = \sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X}_n)(Y_i-\bar{Y}_n)\Big(\sum_{j=1}^{n}(X_j-\bar{X}_n)^2 \sum_{k=1}^{n}(Y_k-\bar{Y}_n)^2\Big)^{-1/2},$$

$$\bar{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i, \qquad \bar{Y}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Y_i.$$

Poznamenejme, že r_n je výběrový korelační koeficient a $Q_{\rho n}$ je logaritmus podílu hustot r_n při H_1 a H_o. Lze ukázat, že $Q_{\rho n}$ je rostoucí funkcí r_n a že kritické nerovnosti (4.8) jsou ekvivalentní nerovnostem

$$(4.9) \qquad \underline{r}_n < r_n < \bar{r}_n, \qquad n = 3,4,\ldots$$

kde $\underline{r}_n$ a $\bar{r}_n$ jsou řešením rovnic:

$$Q_{\rho n}(\underline{r}_n) = b \qquad Q_{\rho n}(\bar{r}_n) = a.$$

Při provádění testu lze vyjít z kritických nerovností (4.8) a použít tabulek funkce $F(\alpha, \alpha', \alpha''; z)$ v [20] nebo můžeme vyjít z nerovností (4.9) a hodnoty $\underline{r}_n$ a $\bar{r}_n$ aproximovat následovně ($\underline{r}_m$, $\bar{r}_n$ nejsou tabelovány):

$$\underline{r}_n^* = r_\infty + \frac{A}{n}\left(\frac{1}{4}\ln\frac{1-\rho_1^2}{1-\rho_o^2} - b\right),$$

$$\bar{r}_n^* = r_\infty + \frac{A}{n}\left(\frac{1}{4}\ln\frac{1-\rho_1^2}{1-\rho_o^2} - a\right),$$

$$r_\infty = \frac{1+\rho_o\rho_1 - \sqrt{(1-\rho_o^2)(1-\rho_1^2)}}{\rho_o+\rho_1},$$

$$A = (\rho_1-\rho_o)\left(\frac{1-\rho_o^2}{1-\rho_o^2}\right)^{1/2}\left(\rho_1-\rho_o\left(\frac{1-\rho_1^2}{1-\rho_o^2}\right)^{1/2}\right)^2.$$

4.5 Sekvenční znaménkový test a sekvenční jednovýběrový Wilcoxonův test

Nechť $\{X_i\}_{i=1}^{\infty}$ je posloupnost nezávislých stejně rozdělených náhodných veličin, X_i má spojitou distribuční funkci $F(x-\theta)$, $-\infty < \theta < +\infty$ je neznámý parametr, $F(x)$ je symetrická kolem nuly, tj. $F(x) = 1-F(-x)$ pro vš. x .

Sekvenčním znaménkovým testem se obvykle rozumí jakýkoli sekvenční test, při jehož konstrukci vycházíme z testové statistiky pro (nesekvenční) znaménkový test, tj. z

$$S_n^+ = \sum_{i=1}^{n} I\{X_i \geqq 0\} \quad . \tag{4.10}$$

Podobně je tomu u dalších sekvenčních neparametrických testů. Oba testy zde uvedené (sekvenční znaménkový a sekvenční jednovýběrový Wilcoxonův) jsou založeny na příslušných nesekvenčních statistikách, avšak způsoby konstrukce sekvenčních testů na základě těchto statistik jsou odlišné.

Sekvenční znaménkový test. Uvažujme úlohu testovat hypotézu $H_0 : \theta \leqq 0$ proti $H_1 : \theta \geqq \theta_1$, $\theta_1 > 0$ splňuje $F(\theta_1) > 1/2$. Požadujeme, aby pravděpodobnosti chyb 1. a 2. druhu byly menší nebo rovny α resp. β . Označme $F(\theta_1) = p_1$. Test je dán následujícím rozhodovacím pravidlem : na základě náhodného výběru $(X_1,\dots,X_n)$ přijmeme H_0, jestliže

$$n \ln 2(1-p_1) + S_n^+ \ln \frac{p_1}{1-p_1} \leqq b \ ,$$

přijmeme H_1, jestliže

$$n \ln 2(1-p_1) + S_n^+ \ln \frac{p_1}{1-p_1} \geqq a,$$

jinak pokračujeme ve výběru, kde čísla $b < a$ jsou volena tak, aby byly splněny požadavky na pravděpodobnosti chybných rozhodnutí (lze je aproximovat $\ln \frac{\beta}{1-\alpha}$ resp. $\ln \frac{1-\beta}{\alpha}$). Popsaný test je shodný s Waldovým testem pro úlohu $H_0^*: p(\theta) \leqq 1/2$ proti $H_1: p(\theta) \geqq F(\theta_0)$ na základě posloupnosti nezávislých náhodných veličin $\{I\{X_i \geqq 0\}\}_{i=1}^{\infty}$, $P(X_i \geqq 0; \theta) = p(\theta)$.

Sekvenční jednovýběrový Wilcoxonův test. Uvažujme úlohu testovat hypotézu $H_0 : \theta = 0$ proti $H_1 : |\theta| \geqq \theta_1$, $\theta_1 > 0$ dáno. Požadujeme, aby pravděpodobnost chyby 1.druhu byla menší nebo rovna danému α a aby rozsah výběru nepřekročil dané přirozené číslo M. Při sestavování testu vyjdeme z (nesekvenční) Wilcoxonovy jednovýběrové statistiky

$$W_n^+ = \sum_{i=1}^{n} R_{in}^+ \, I\{X_i \geqq 0\} ,$$

kde R_{in}^+ je pořadí $|X_i|$ mezi $|X_1|,\ldots,|X_n|$. Test je dán následujícím rozhodovacím pravidlem: na základě náhodného výběru $(X_1,\ldots,X_n)$ přijmeme H_1, jestliže

$$|W_n^+ - 1/4\, n(n+1)| \geqq z(\alpha, M) \sqrt{1/24 n(n+1)(2n+1)}$$

a

$$n < M ,$$

přijmeme H_1, jestliže

$$|W_n^+ - 1/4 n(n+1)| < z(\alpha, M) \sqrt{1/24\, n(n+1)(2n+1)}$$

a

$$n \geqq M,$$

jinak pokračujeme ve výběru, hodnoty $z(\alpha, M)$ jsou určeny ta aby pravděpodobnost chyby 1.druhu byla menší nebo rovna α . Uvedený test patří mezi tzv. useknuté sekvenční testy. Hodnoty $z(\alpha, M)$ pro některá α a M jsou uvedeny v tabulce.

Tabulka hodnot $z\ (\alpha, M)$

α \ N	10	15	20	25	30	40	50	60
0,01	2,55	2,71	2,81	2,90	2,93	3,00	3,05	3,06
0,02	2,43	2,59	2,67	2,70	2,73	2,82	2,88	2,92
0,05	2,20	2,37	2,40	2,44	2,50	2,56	2,59	2,62
0,10	2,02	2,10	2,20	2,22	2,26	2,33	2,37	2,39

Při praktickém výpočtu lze použít následující rekurentní vzorec:

$$W_n^+ = W_{n-1}^+ + \sum_{i=1}^{n} I\{X_i + X_n > 0\}, \qquad n=2,3,\ldots$$

Poznamenejme, že

$$E(W_n^+; H_0) = 1/4\ n(n+1)$$

$$\mathrm{var}\ (W_n^+; H_0) = 1/24\ n(n+1)(2n+1) .$$

Předností obou uvedených testů je jednoduchý popis i numerické provedení.

4.6 Sekvenční testy životnosti

Při sledování životnosti výrobků vycházíme obvykle z předpokladu, že rozdělení životnosti výrobku (tj. doby od uvedení do provozu do poruchy) je

$$(4.11) \qquad f(t, \lambda) = \lambda e^{-\lambda t}, \quad t \geq 0,$$
$$= 0, \quad t < 0,$$

kde $\lambda > 0$ je neznámý parametr

Jedna z častých úloh je testovat hypotézu H_o: $\lambda \leqq \lambda_o$ proti H_1: $\lambda \geqq \lambda_1$, $0 < \lambda_o < \lambda_1 < +\infty$, přičemž požadujeme, aby pravděpodobnosti chyb 1. a 2.druhu byly menší nebo rovny daným číslům α resp. β ($\alpha + \beta < 1$). Existuje několik sekvenčních postupů pro tuto úlohu.

Zde se zmíníme o dvou (tzv. zamitacim a nezamitacim).

Při zamitacim postupu je experiment organizován následovně. Zvolíme M přirozené a uvedeme současně do provozu M výrobků. Jakmile se jeden výrobek porouchá, nahradíme ho novým (tedy neustále sledujeme M výrobků). Předpokládá se, že rozdělení životnosti jednotlivých výrobků má tvar (4.10) a poruchy nastávají nezávisle. Označme Y_i dobu i-té poruchy $i=1,2,\ldots$ Sdružené rozdělení $Y_1,\ldots,Y_n$ má tvar

(4.12) $$h_n(y_1,\ldots,y_n;\lambda) = (M\lambda)^n \, e^{-M\lambda y_n} , \qquad 0 < y_1 < y_2 < \ldots < y_n < +\infty \, .$$
$$= \quad \text{jinak.}$$

Test založíme na podílu hustot (4.12) při $\lambda = \lambda_1$ a $\lambda = \lambda_o$, tj. na statistice

$$Q_n = \ln \frac{h_n(Y_1,\ldots,Y_n;\ \lambda_1)}{h_n(Y_1,\ldots,Y_n;\ \lambda_o)} =$$

$$= n \ln \frac{\lambda_1}{\lambda_o} + M(\lambda_o - \lambda_1)\, Y_n \ , \quad n=1,2,3,\ldots \ .$$

Test je dán následujicim pravidlem : po n-té poruše přijmeme H_o, jestliže

$$M\, Y_n \geqq (\lambda_o - \lambda_1)^{-1} \ln \frac{\beta}{1-\alpha} + (\lambda_o - \lambda_1)^{-1}\, n \ln \frac{\lambda_o}{\lambda_1} ,$$

přijmeme H_1, jestliže

$$M Y_n \leqq (\lambda_0 - \lambda_1)^{-1} \ln \frac{1-\beta}{\alpha} + (\lambda_0 - \lambda_1)^{-1} n \ln \frac{\lambda_0}{\lambda_1},$$

jinak porouchaný výrobek nahradíme novým. (Hodnoty $\ln \frac{\beta}{1-\alpha}$, $\ln \frac{1-\beta}{\alpha}$ jsou aproximativní.) Náhodné veličiny Y_1, Y_2-Y_1, $Y_3-Y_2, \ldots$ jsou nezávislé stejně rozdělené, tudíž vlastnosti testu jsou shodné s vlastnostmi Waldova testu uvedeného v kapitole 2.

Náhodná veličina

$$N_1 = \min\left\{n;\ \ln \frac{\lambda_1}{\lambda_0} + M Y_n(\lambda_0 - \lambda_1) \notin \left(\ln \frac{\beta}{1-\alpha},\ \ln \frac{1-\beta}{\alpha}\right)\right\}$$

označuje počet poruch do ukončení postupu (na rozdíl od dřívějších případů, kdy N byl rozsah výběru). Počet výrobků potřebných k pokusu je $M + N_1 - 1$ a celková doba trvání pokusu Y_{N_1}.

Při <u>nezamitacím postupu</u> vycházíme ze stejných předpokladů jako u zamitacicho postupu. Začneme se sledováním M výrobků, ale porouchané již nenahrazujeme novými. Takže po n-té poruše $(n \leqq M)$ sledujeme $M-n$ výrobků. Označme Y_i dobu i-té poruchy. Sdružené rozdělení dob poruch $(Y_1, \ldots, Y_n)$ má hustotu $(n \leqq M)$;

$$(4.13) \quad g_n(y_1, \ldots, y_n) = \frac{M!\ \lambda^n}{(M-n)!} \exp\left\{-\lambda \sum_{i=1}^{n} y_i - (M-n)\lambda y_n\right\} \qquad 0 < y_1 < y_2 < \ldots < y_n$$

$$= 0 \qquad \text{jinak}.$$

Tvar hustoty vyplyne z následujících vztahů (ozn. T_i - dobu poruchy i-tého výrobku, $i=1, \ldots, M$):

$$P(Y_1 < y_1, \ldots, Y_n < y_n; \lambda) = M(M-1)\ldots(M-n+1) \;.$$

$$\cdot\, P(T_1 < y_1,\ T_2 < y_2, \ldots, T_n < y_n,\ T_{n+k} > y_n,\quad k=1,\ldots,M-n) =$$

$$= \frac{M!}{(M-n)!} \prod_{i=1}^{n} (1- e^{-\lambda y_i})\, e^{-\lambda y_n (M-n)} \;, \qquad 0 < y_1 < y_2 < \ldots < y_n < \infty .$$

Vyjdeme-li při konstrukci testu z logaritmu podílu hustot (4.13) při $\lambda = \lambda_1$ a $\lambda = \lambda_0$ dospějeme k testu: po n-té poruše ($n < M$) přijmeme H_0, jestliže

$$\sum_{i=1}^{n} Y_i - (M-n) Y_n \geqq (\lambda_0 - \lambda_1)^{-1} \left(\ln \frac{\beta}{1-\alpha} + n \ln \frac{\lambda_0}{\lambda_1} \right),$$

přijmeme H_1, jestliže

$$\sum_{i=1}^{n} Y_i - (M-n) Y_n \leqq (\lambda_0 - \lambda_1)^{-1} \left(\ln \frac{1-\beta}{\alpha} + n \ln \frac{\lambda_0}{\lambda_1} \right),$$

jinak pokračujeme ve sledování poruch.

Po poruše všech M výrobků přijmeme H_0, jestliže

$$\sum_{i=1}^{M} Y_i \geqq (\lambda_0 - \lambda_1)^{-1}\, M \ln \frac{\lambda_1}{\lambda_0} \;,$$

jinak přijmeme H_1.

Lze ukázat, že pro M dostatečně velká ($M > 3 \sup_{\lambda > 0} E(N_2; \lambda)$, N_2-počet poruch do ukončení postupu), se operační charakteristika a střední počet poruch (do ukončení postupu) liší nevýznamně od odpovídajících veličin pro zamítací postup.

Při srovnávání obou postupů dospějeme k těmto závěrům:

1) střední doba trvání pokusu je menší u zamítacího postupu;

2) střední počet výrobků potřebných k pokusu je menší u nezamítacího postupu;

3) střední doba trvání pokusu u nezamítacího postupu, začínáme-li s $M > 1$ výrobky, je menší než u zamítacího s $M = 1$.

5. Sekvenční odhady

5.1 Úvod

Budiž $\{X_i\}_{i=1}^{\infty}$ posloupnost nezávislých stejně rozdělených náhodných veličin, X_i s hustotou $f(x;\theta)$, $\theta \in (\underline{\theta},\bar{\theta})$, θ je neznámý parametr.

Podobně jako v teorii odhadu při nesekvenčním přístupu uvažujeme i při sekvenčním přístupu úlohy o bodovém a intervalovém odhadu parametru θ.

Při úloze o sekvenčním bodovém odhadu vyjdeme z dvojné posloupnosti $\{\theta_n, \varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$, kde $\theta_n = \theta_n(X_1,\dots,X_n)$ je bodový odhad parametru θ při pevném rozsahu výběru (rovném n) a $\varphi_n = \varphi_n(X_1,\dots,X_n)$ je statistika udávající rozhodovací pravidlo pro ukončení výběru, φ_n nabývá pouze hodnot 0 a 1; je-li $\varphi_n = 1$, ukončíme výběr, je-li $\varphi_n = 0$ pokračujeme ve výběru. Sekvenčním bodovým odhadem pro parametr θ budeme rozumět

$$\theta_N = \theta_N(X_1,\dots,X_N),$$

kde

$$N = \min\{n;\ \varphi_n(X_1,\dots,X_n) = 1\} \quad (5.1)$$

Při úloze o sekvenčním intervalovém odhadu vyjdeme z trojné posloupnosti $\{L_n, U_n, \varphi_n\}$, kde $L_n = L_n(X_1,\dots,X_n)$ a $U_n = U_n(X_1,\dots,X_n)$ jsou statistiky užívané při úloze intervalového odhadu při pevném rozsahu výběru, $\varphi_n = \varphi_n(X_1,\dots,X_n)$ je pravidlo pro ukončení výběru s vlastnostmi výše popsanými.

Sekvenčním intervalovým odhadem pro parametr θ budeme rozumět interval

$$(L_N(X_1,\dots,X_N),\ U_N(X_1,\dots,X_N))\ ,$$

kde N je dáno (5.1).

Budeme říkat, že sekvenční intervalový odhad (L_N,U_N) pro parametr θ má koeficient spolehlivosti (hladinu) $1-\alpha$, jestliže

$$P(\theta\in(L_N,U_N);\theta) = 1-\alpha\ . \tag{5.2}$$

Poznamenejme, že náhodná veličina N je rozsah výběru.

Sekvenční bodové a intervalové odhady používáme v řadě úloh, které neumíme řešit na základě odhadů nesekvenčních, např. hledáme intervalový odhad dané délky s daným koeficientem spolehlivosti nebo bodový odhad s rozptylem menším nebo rovným danému číslu pro střední hodnotu normálního rozdělení s neznámým rozptylem. Sekvenční odhady též používáme, máme-li jen částečné znalosti o rozdělení náhodných veličin X_1 (např. konečnost momentů).

Je nutno říci, že zatím není vypracovaná teorie sekvenčních odhadů v té míře jako u nesekvenčních. Pokud se týče metody volby statistik Q_n, L_n, U_n obvykle použijeme statistiky užívané při nesekvenčním přístupu. Definice φ_n obvykle vyplyne z požadavků úlohy. Vyvstává však problém s vyšetřováním vlastností sekvenčních odhadů, popř. s rozdělením náhodné veličiny N. Lze většinou odvodit jen "přibližné" vlastnosti v tom smyslu, že uvažujeme posloupnost náhodných veličin ozn. $\{N_m\}_{m=1}^{\infty}$ a vyšetřujeme limitní chování jak N_m tak θ_{N_m}, L_{N_m}, U_{N_m} pro $m \to \infty$.

Nejstarší práce spadající do této problematiky napsal Stein [21], který navrhl dvoustupňovou metodu konstrukce intervalového odhadu dané délky s daným koeficientem spolehlivosti pro střední hodnotu normálního rozdělení s neznámým rozptylem (podobně viz např. [18] str. 531).

V následujících dvou paragrafech se budeme zabývat dvěma typy úloh z teorie odhadu, které lze úspěšně řešit na základě sekvenčního přístupu.

5.2 Sekvenční bodové odhady

Nejprve si dokážeme modifikaci Rao-Cramérovy věty pro sekvenční odhady.

Budiž $\{X_i\}_{i=1}^{\infty}$ posloupnost nezávislých stejně rozdělených náhodných veličin, X_i má hustotu $f(x,\theta)$ (vzhl. k σ-kon. míře μ), $\theta \in (\underline{\theta},\bar{\theta})$, vyhovující požadavkům:

a) množina $M = \{x; f(x;\theta) > 0\}$ nezávisí na θ;

b) pro sk.vš. $x \in M$ (vzhl.k μ)ex.konečné parciální derivace $f'(x,\theta) = \dfrac{\partial f(x,\theta)}{\partial \theta}$;

c) pro vš. $\theta \in (\underline{\theta},\bar{\theta})$ platí :

$$\int_M f'(x;\theta)\, d\mu(x) = 0;$$

d) integrál

$$I(\theta) = \int_M \frac{(f'(x;\theta))^2}{f(x;\theta)}\, d\mu(x)$$

je konečný a kladný.

Tyto podmínky se shodují s podmínkami uvažovanými pro klasickou Rao-Cramérovu větu. Někdy se nazývají podmínkami regularity.

Věta 5.1 (sekvenční Rao-Cramérova): Nechť jsou splněny výše uvedené požadavky. Nechť θ_N je sekvenční bodový odhad parametru θ s vlastnostmi:

1) $E(\theta_N^2;\theta) < +\infty$ pro vš. $\theta \in (\underline{\theta},\bar{\theta})$;

2) existuje derivace funkce $b(\theta) = E(\theta_N;\theta)$ pro vš. $\theta \in (\underline{\theta},\bar{\theta})$;

3) $$\frac{\partial}{\partial\theta} \int_{N=n}\!\!\cdots\!\int \theta_n \prod_{i=1}^{n} f(x_i;\theta)\, d\mu(x_1)\ldots d\mu(x_n) =$$
$$= \int_{N=n}\!\!\cdots\!\int \theta_n \frac{\partial}{\partial\theta} \prod_{i=1}^{n} f(x_i;\theta)\, d\mu(x_1)\ldots d\mu(x_n)$$
pro vš. $\theta \in (\underline{\theta},\bar{\theta})$.

Nechť $E(N;\theta) < +\infty$ a existuje $\alpha > 0$ takové, že jev $\{N > n\}$ implikuje
$$\left\{\left| \sum_{i=1}^{n} \frac{f'(X_i;\theta)}{f(X_i;\theta)} \right| < \alpha\right\} \text{ pro vš. } \theta \in (\underline{\theta},\bar{\theta}) .$$

Pak platí

$$E((\theta_N - E(\theta_N;\theta))^2;\theta) \geq \frac{(b'(\theta))^2}{E(N,\theta)\,I(\theta)} . \tag{5.3}$$

Důkaz je podobný důkazu klasické (nesekvenční) Rao-Cramérovy věty.

Z předpokladů věty plyne

$$b'(\theta) = \frac{\partial}{\partial\theta} \sum_{n=1}^{\infty} \int_{N=n}\!\!\cdots\!\int \theta_n \prod_{i=1}^{n} f(x_i;\theta)\, d\mu(x_1)\ldots d\mu(x_n) =$$
$$= \sum_{n=1}^{\infty} \int_{N=n}\!\!\cdots\!\int \theta_n \sum_{j=1}^{n} \frac{f'(x_j;\theta)}{f(x_j;\theta)} \prod_{i=1}^{n} f(x_i;\theta)\, d\mu(x_1)\ldots d\mu(x_n) =$$
$$= E\left(\theta_N \sum_{j=1}^{N} \frac{f'(X_j;\theta)}{f(X_j;\theta)} ; \theta\right) .$$

Ze Schwarzovy nerovnosti a

$$(5.4)\qquad E\left(\frac{f'(X_j;\theta)}{f(X_j;\theta)};\theta\right)=0\qquad j=1,2,\dots,\qquad \theta\in(\underline{\theta},\bar{\theta})$$

máme

$$(5.5)\quad (b'(\theta))^2=E\left\{\left[(\theta_N-E(\theta_N;\theta))\sum_{j=1}^{N}\frac{f'(X_j;\theta)}{f(X_j;\theta)}\right]^2;\theta\right\}\leq$$

$$\leq E\left[(\theta_N-E(\theta_N,\theta))^2;\theta\right]\;E\left[\left(\sum_{j=1}^{N}\frac{f'(X_j;\theta)}{f(X_j;\theta)}\right)^2;\theta\right].$$

Vzhledem k předpokladům věty a (5.4) jsou splněny předpoklady Waldovy rovnosti II a tudíž

$$E\left(\left(\sum_{j=1}^{N}\frac{f'(X_j;\theta)}{f(X_j;\theta)}\right)^2;\theta\right)=E(N;\theta)I(\theta),\qquad \theta\in(\underline{\theta},\bar{\theta})$$

Odtud a z (5.5) plyne tvrzení věty. ▨

<u>Důsledek.</u> Za předpokladu věty 5.1 platí

$$E((\theta_N-\theta)^2;\theta)\geq\frac{(b'(\theta))^2}{E(N,\theta)I(\theta)}.$$

Uvažujme nyní (za předpokladů uvedených na začátku 1.1) následující úlohu bodového odhadu pro danou posloupnost bodových odhadů $\{\theta_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\theta_n=\theta_n(X_1,\dots,X_n)$, parametru θ a dané číslo $c>0$: najít přirozené číslo n_o (rozsah výběru) tak, aby

$$(5.6)\qquad E((\theta_{n_o}-\theta)^2;\theta)\leq c^2.$$

V některých případech takové n_o lze stanovit. Ve většině případů to však není možné, neboť toto n_o závisí na odhadovaném parametru θ nebo na dalších neznámých parametrech.

Pak je přirozené od požadavku (5.6) přejít k požadavku

(5.7) $$n^{-1} s_n^2 \leq c^2,$$

kde s_n^2 je statistika taková, že

$$s_n^2 - n\, E((\theta_n-\theta)^2;\theta) \longrightarrow 0 \quad \text{pro} \quad n\to\infty \quad \text{sk.j.}$$

Tuto úlohu můžeme řešit na základě sekvenčních bodových odhadů. Pro dané $c > 0$ definujeme pravidlo φ_n pro ukončení výběru následovně:

$$\varphi_n(x_1,\dots,x_n) = 1 \qquad n^{-1} s_n^2 \leq c^2 \quad , \quad n=1,2,\dots$$
$$= 0 \qquad n^{-1} s_n^2 > c^2 \quad , \quad n=1,2,\dots$$

tj. pro rozsah výběru $N(c)$ platí :

$$N(c) = \min\{n;\ n^{-1} s_n^2 \leq c^2\} \quad .$$

Za sekvenční bodový odhad parametru θ pak vezmeme $\theta_{N(c)}$. V následující větě si zformulujeme některé vlastnosti odhadu $\theta_{N(c)}$ a rozdělení $N(c)$.

Věta 5.2 : Předpokládejme, že posloupnost statistik $\{\theta_n\}_{n=1}^{\infty}$ a $\{s_n^2\}_{n=1}^{\infty}$, $\theta_n=\theta_n(X_1,\dots,X_n)$, $s_n^2 = s_n^2(X_1,\dots,X_n)$, má vlastnosti:

1) $\sqrt{n}(\theta_n-\theta) = \sum_{i=1}^{n} Z_i \frac{1}{\sqrt{n}} A + O(1)$ sk.j. pro $n\to\infty$, $A > 0$, Z_i jsou nezávislé stejně rozdělené náhodné veličiny s $E(Z_i;\theta) = 0$, $\mathrm{var}(Z_i;\theta) = 1$;

2) $s_n^2 > 0$ sk.j., $n=1,2,$ $s_n^2 \longrightarrow A^2 > 0$ sk.j. pro $n\to\infty$. $E\, s_n^4 \leq D$ pro vš. n; $D < +\infty$.

Pak platí :

a) $N(c) < +\infty$ sk.j., $E\, N(c) < +\infty$ pro vš. $c > 0$, $N(c)\ c^2 \longrightarrow A^2$ sk.j. pro $c\to 0$;

b) $\theta_{N(c)} \longrightarrow 0$ sk.j. pro $c \to 0$,
$\sqrt{N(c)}\,(\theta_{N(c)} - \theta)$ má pro $c \longrightarrow 0$ asymptoticky normální rozdělení s parametry 0 a A^2.

<u>Důkaz</u> : Platnost $N(c) < +\infty$ sk.j. plyne bezprostředně z definice $N(c)$ a předpokladů věty.

Dále platí

$$E\,N(c) = \sum_{m=1}^{\infty} P(N(c) > m) = \sum_{m=1}^{\infty} P(s_m > c\sqrt{m}) =$$
$$\leq \sum_{m=1}^{\infty} E\, s_m^4\, m^{-2} c^{-4} \leq D\, c^{-4} \sum_{m=1}^{\infty} m^{-2} < +\infty .$$

Z nerovnosti

$$s^2_{N(c)} \leq N(c)\, c^2 \leq \frac{N(c)}{N(c)-1}\, s^2_{N(c)-1}$$

a z předpokladu 2) plyne

$$c^2\, N(c) \longrightarrow A^2 \quad \text{sk.j. pro } c \to 0.$$

b) z a) plyne $N(c) \longrightarrow \infty$ sk.j. pro $c \longrightarrow 0$. Z předpokladu 1) a ze silného zákona velkých čísel plyne

$$\theta_n \longrightarrow 0 \quad \text{sk.j. pro } n \to \infty ,$$

což spolu s $N(c) \to \infty$ sk.j. pro $c \to 0$ implikuje $\theta_{N(c)} \longrightarrow \theta$ sk.j. pro $c \to 0$. Z předpokladu 1) a z $N(c) \to \infty$ sk.j. pro $c \to 0$ plyne podle Věty VIII.7.1 v [19] druhá část tvrzení b). ▨

Lze tedy říci, že uvedený sekvenční postup skončí s pravděpodobností 1 a získaný sekvenční bodový odhad $\theta_{N(c)}$ je konsistentní pro $c \longrightarrow 0$ a splňuje (5.2) v limitě.

<u>Příklad:</u> Uvažujme úlohu bodového odhadu parametru μ_n v $N(\mu, \sigma^2)$, μ ani σ^2 neznáme. Položme $\bar{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i$ a $s^2_n = \frac{1}{n} + \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (X_i - \bar{X}_n)^2$ ($\bar{X}_n$ je nejlepší nestranný li-

neární odhad μ na základě výběru $(X_1,\dots,X_n)$).

Definujme

$$N(c) = \min\{n,\ n^{-1} s_n^2 \leq c^2\}.$$

Pak jsou splněny předpoklady věty a platí $\bar{X}_{N(c)} \longrightarrow \mu$ sk.j. pro $c \longrightarrow 0$ a $(\bar{X}_{N(c)} - \mu)\sqrt{N(c)}$ má pro $c \longrightarrow 0$ rozdělení $N(0, \sigma^2)$.

5.3 Sekvenční intervalové odhady dané délky

Nechť jsou splněny předpoklady uvedené na začátku 5.1. Uvažujeme nyní úlohu konstruovat sekvenční intervalový odhad pro parametr θ dané délky $2d$ ($d > 0$ dané) s daným koeficientem spolehlivosti $1-\alpha$.

Předpokládejme, že statistiky L_n a U_n, $n=1,2,\dots,$ mají vlastnosti:

(5.7) $L_n = L_n(X_1,\dots,X_n) < U_n = U_n(X_1,\dots,X_n)$, sk.j.;

(5.8) $\sqrt{n}(U_n - L_n) \longrightarrow 2\, u_{1-\alpha/2}\, A$, sk.j. pro $n \to \infty$ $A > 0$;

(5.9) $\sqrt{n}(L_n - \theta) - Z_n A - u_{1-\alpha/2} A \longrightarrow 0$, sk.j. pro $n \to \infty$, kde

Z_n je standardizovaný součet nezávislých stejně rozdělených náhodných veličin s konečným druhým momentem.

Definujme nyní pravidlo pro ukončení výběru následovně:

(5.10) $N(d) = \min\{n;\ U_n - L_n \leq 2d\}$, $d > 0$

Za hledaný sekvenční interval vezmeme

$$(L_{N(d)}, U_{N(d)}).$$

Tento interval má délku menší nebo rovnou $2d$. Další vlastnosti si zformulujeme jako větu při dalším předpokladu:

(5.11) Náhodné veličiny $\{N(d)d^2;\ d>0\}$ jsou stejnoměrně integrovatelné.

<u>Věta 5.3</u> . Za výše uvedených předpokladů platí:

a) $N(d) < +\infty$ sk.j., $E\,N(d) < +\infty$ pro vš. $d > 0$, $N(d)$ je nerostoucí funkce d, $\lim_{d\to 0} N(d) = +\infty$ sk.j.,

$\lim_{d\to 0} E\,N(d) = +\infty$;

b) $\lim_{d\to 0} N(d)d^2 = u^2_{1-\alpha/2} A^2$, sk.j.,

$\lim_{d\to 0} E\,N(d)d^2 = u^2_{1-\alpha/2} A^2$;

c) $\lim_{d\to 0} P(L_{N(d)} \leq \theta \leq U_{N(d)}) = 1-\alpha$.

<u>Důkaz:</u>

a) Z předpokladu (5.11) a definice $N(d)$ plyne, že $N(d)<+\infty$ sk.j., $E\,N(d) < +\infty$ a monotonie $N(d)$.

Z předpokladů (5.7.-5.8) a definice $N(d)$ plyne $\lim_{d\to 0} N(d)=+\infty$ sk.j. Poslední tvrzení v a) plyne z monotonie $N(d)$ a $\lim_{d\to 0} N(d) = +\infty$ sk.j.

b) Z definice $N(d)$ plyne

$\sqrt{N(d)}(U_{N(d)} - L_{N(d)}) \leq 2\sqrt{N(d)}\,d \leq \sqrt{\frac{N(d)}{N(d)-1}} \cdot \sqrt{N(d)-1}(U_{N(d)-1} - L_{N(d)-1})$.

Vzhledem ke tvrzení a) platí ($N(d) \to \infty$ pro $d \to 0$),

$\sqrt{N(d)}(U_{N(d)} - L_{N(d)}) \longrightarrow 2u_{1-\alpha/2} A$, sk.j. pro $d \to 0$,

$\sqrt{N(d)-1}(U_{N(d)-1} - L_{N(d)-1}) \longrightarrow 2u_{1-\alpha/2} A$, sk.j. pro $d \to 0$.

Tudíž platí 1.část tvrzení b), tj.

$$d\sqrt{N(d)} \longrightarrow u_{1-\alpha/2}A,\ \text{sk.j. pro } d \to 0.$$

Odtud a z předpokladu (5.8)vyplyne platnost druhé části tvrzení b).

c) Využitím předpokladů (5.7.-5.9)(5.11) obdržíme :

$$\lim_{d\to 0} P(L_{N(d)} \leq \theta \leq U_{N(d)}) =$$

$$= \lim_{d\to 0} P(\sqrt{N(d)}(L_{N(d)} - \theta) \leq 0 \leq \sqrt{N(d)}(U_{N(d)} - \theta)) =$$

$$= \lim_{d\to 0} P(|Z_{N(d)}| \leq u_{1-\alpha/2}).$$

Vzhledem k tomu, že Z_n je standardizovaný součet nezávislých stejně rozdělených náhodných veličin s konečným rozptylem a $N(d)\to\infty$ sk.j. při $d\to 0$, platí podle Věty VIII.7.1. v [19] :

$$\lim_{d\to 0} P(|Z_{N(d)}| \leq u_{1-\alpha/2}) = 1 - \alpha .$$

Tedy c) platí.

Tvrzení a) věty mimo jiné říká, že sekvenční postup při daném d bude ukončen s pravděpodobností 1 a že při $d\to 0$ roste rozsah výběru $N(d)$ nade všechny meze. Tvrzení b) říká, že rozsah řádově roste stejně rychle jako d^{-2}. Poslední tvrzení říká, že pravděpodobnost, že interval spolehlivosti pokryje skutečnou hodnotu parametru θ je v limitě rovna $1-\alpha$.

<u>Příklad:</u> Nechť $\{X_i\}_{i=1}^{\infty}$ je posloupnost nezávislých stejně rozdělených náhodných veličin s rozdělením $N(\mu, \sigma^2)$, $\mu, \sigma^2 > 0$ neznáme. Chceme zkonstruovat interval spolehlivosti pro μ s délkou menší nebo rovnou $2d (d > 0)$ a koeficientem spolehlivosti $1 - \alpha$. V souhlase s nesekvenčním přístupem položme

$$L_n = \bar{X}_n - \frac{s_n u_{1-\alpha/2}}{\sqrt{n}} , \quad U_n = \bar{X}_n + \frac{s_n u_{1-\alpha/2}}{\sqrt{n}} ,$$

kde

$$\bar{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i , \qquad s_n^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n} (X_i-\bar{X}_n)^2 + \frac{1}{n} .$$

Definujeme-li pravidlo o ukončení výběru předpisem

$$N(d) = \min\{n;\ s_n\, u_{1-\alpha/2} / \sqrt{n} \leq d\},$$

má požadovaný sekvenční interval spolehlivosti tvar:

$$(\bar{x}_{N(d)} - s_{N(d)}\, u_{1-\alpha/2} / \sqrt{N(d)},\ \ \bar{x}_{N(d)} + s_{N(d)}\, u_{1-\alpha/2} / \sqrt{N(d)}) .$$

Nyní ověříme splnění předpokladů Věty 5.3. Ze silného zákona velkých čísel plyne

$$s_n \longrightarrow \sigma^2 \quad \text{sk.j. pro} \quad n \to \infty .$$

Toto spolu s definicí L_n a U_n implikuje splnění předpokladů (5.7.-5.9). Pokud se týče předpokladu (5.11), stačí dokázat, že

$$(5.12) \qquad \lim_{m \to \infty} E\, N(d) d^2\, I\{N(d) d^2 > m\} = 0$$

stejnoměrně pro $0 < d < d_0$.

Zřejmě platí

$$(5.13) \qquad E\, N(d) d^2\, I\{N(d) d^2 > m\} = \sum_{k > m d^{-2}} P(N(d) > k) d^2 .$$

Z definice $N(d)$ a z Čebyševovy nerovnosti máme:

$$P(N(d) > k) = P(s_k\, u_{1-\alpha/2} > d \sqrt{k}) \leq E\, s_k^4\, u_{1-\alpha/2}^4\, d^{-4}\, k^{-2} \leq$$
$$\leq C\, d^{-4}\, k^{-2},$$

kde C je konstanta nezávisející ani na d ani k. Využili jsme zde faktu, že $(k-1)(s_k - \frac{1}{k})\, \sigma^2$ má χ^2 rozdělení o $k-1$ stupních volnosti. Dosadíme-li tento odhad do (5.13), obdržíme

$$E\, N(d) d^2\, I\{N(d) d^2 > m\} = C \sum_{k > m d^{-2}} d^2\, k^{-2} \leq C\, m^{-1} .$$

Odtud již plyne (5.12) a tedy tvrzení Věty 5.3 v tomto případě platí.

6. Doplněk

V této kapitole jsou dokázána tvrzení pravděpodobnostního charakteru, která nejsou obsažena v běžných učebnicích teorie pravděpodobnosti a která jsou potřebná v sekvenční analýze. Pozornost je soustředěna na Waldovy rovnosti, které jsou důsledkem jedné obecné věty o martingalech. Stojí za povšimnutí, že Wald dokázal tyto nerovnosti pro účely sekvenční analýzy, ale později našly širší uplatnění.

Budiž $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ pravděpodobnostní prostor, kde Ω je úplný separabilní metrický prostor, $\mathcal{A}$ je σ-algebra borelovských podmnožin Ω. Budiž R^1 reálná přímka a $\mathcal{B}$ systém borelovských podmnožin R^1. Budiž $X : (\Omega, \mathcal{A}) \longrightarrow (R^1, \mathcal{B})$ náhodná veličina s konečnou střední hodnotou $E\,X$ (tj. $\int |X|\,dP < \infty$). V dalším budeme značit symbolem $\sigma(X_1, \ldots, X_n)$ minimální σ-algebru generovanou náhodnými veličinami $X_1, \ldots, X_n$.

Připomeňme si definici střední hodnoty. Nechť $\mathcal{K}$ je σ-algebra podmnožin Ω, pro kterou platí $\mathcal{K} \subset \mathcal{A}$. Označme $P^{\mathcal{K}}$ zúžení pravděpodobnostní míry P na $\mathcal{K}$. Podmíněnou střední hodnotou $E(X|\ )$ náhodné veličiny X při daném $\mathcal{K}$ rozumíme K-měřitelnou funkci splňující (až na $P^{\mathcal{K}}$-ekviv.) vztah

$$\int_E E(X|K)\,dP^{\mathcal{K}} = \int_E X\,dP \qquad \text{pro vš. } E \in \mathcal{K}$$

Specielně, je-li $T: (\Omega, \mathcal{A}) \longrightarrow (R^1, \mathcal{E})$ náhodná veličina

($\mathcal{E} \subset B$) s distribuční funkcí F_T, rozumíme podmíněnou střední hodnotou $E(X|T=t)$ náhodné veličiny X při $T=t$ funkci proměnné t splňující

$$\int_F E(X|T=t)\,dF_T(t) = \int_{\{T\in F\}} X\,dP \qquad \text{pro vš. } F \in \mathcal{E}.$$

Budiž $\{\mathcal{F}_n\}_{n=1}^{\infty}$ a $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ posloupnosti σ-algeber resp. náhodných veličin takových, že $\mathcal{F}_1 \subseteq \mathcal{F}_2 \subseteq \dots \subset \mathcal{A}$ a S_n má konečnou střední hodnotu a je $\mathcal{F}_n$-měřitelná, $n=1,2,\dots$ Označme $\mathcal{F} = \sigma(\{\mathcal{F}_n\}_{n=1}^{\infty})$ minimální σ-algebru vytvořenou $\{\mathcal{F}_n\}_{n=1}^{\infty}$. Posloupnost $\{(S_n, \mathcal{F}_n)\}_{n=1}^{\infty}$ nazýváme martingal, jestliže

$$E(S_n | \mathcal{F}_j) = S_j \quad \text{sk.j. pro vš. } n > j.$$

Příklad. Nechť $\{X_i\}_{i=1}^{\infty}$ je posloupnost nezávislých náhodných veličin s nulovými středními hodnotami. Položme $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$. Nechť $\mathcal{F}_n$ je σ-algebra indukovaná náhodnými veličinami $X_1,\dots,X_n$ (tj. $\mathcal{F}_n = \sigma(X_1,\dots,X_n)$). Pak posloupnost $\{(S_n, \mathcal{F}_n)\}_{n=1}^{\infty}$ tvoří martingal. Uvědomme si, že $\sigma(X_1,\dots,X_n) = \sigma(S_1,\dots,S_n)$.

Příklad. Nechť $\{X_i\}_{i=1}^{\infty}$ je posloupnost nezávislých náhodných veličin s $EX_i = 1$. Pak posloupnost $\{(D_n, \mathcal{F}_n)_{n=1}^{\infty}\}$, kde $D_n = \prod_{i=1}^{n} X_i$, $\mathcal{F}_n = \sigma(X_1,\dots,X_n)$, tvoří martingal.

Budiž $\{\mathcal{F}_n\}_{n=1}^{\infty}$ neklesající posloupnost σ-algeber $\mathcal{F}_n \subset \mathcal{A}$ a $\mathcal{F}_\infty$ je minimální σ-algebra vytvořená $\{\mathcal{F}_n\}_{n=1}^{\infty}$. Náhodnou veličinu T definovanou na $(\Omega, \mathcal{A})$ s hodnotami v $\mathcal{N} \cup \{+\infty\}$ ($\mathcal{N}$ označuje množinu všech přirozených čísel) nazveme

<u>markovský čas vzhledem k</u> $\{\mathcal{F}_n\}_{n=1}^{\infty}$, jestliže $\{T \leq n\} \in \mathcal{F}_n$ pro vš. $n \in \mathcal{N} \cup \{+\infty\}$ (nebo ekvivalentně $\{T = n\} \in \mathcal{F}_n$).

<u>Příklad.</u> Budiž $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ posloupnost náhodných veličin, $S_n : (\Omega, \mathcal{A}) \to (R^1, \mathcal{B})$. Budiž $B \in \mathcal{B}$. Definujme

$$T = \min\{n;\ S_n \in B\},$$

pak T je markovský čas vzhledem k $\{\mathcal{F}_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\mathcal{F}_n = \sigma(S_1, \dots, S_n)$.

<u>Věta D.1.</u> Nechť posloupnost $\{(S_n, \mathcal{F}_n)\}_{n=1}^{\infty}$ je martingal, T markovský čas vzhledem k $\{\mathcal{F}_n\}_{n=1}^{\infty}$ s konečnou střední hodnotou. Nechť jev $\{T > n\}$ implikuje

$$\{E(|S_{n+1} - S_n| \,|\, \mathcal{F}_n) \leq \alpha\} \quad \text{sk.j. pro vš. } n.$$

Pak

$$E|S_T| < +\infty \quad \text{a} \quad E\,S_T = E\,S_1.$$

<u>Důkaz.</u> Označíme-li

$$\xi_1 = |S_1|,\quad \xi_2 = |S_1| + |S_2 - S_1|, \dots,$$
$$\xi_n = |S_1| + |S_2 - S_1| + \dots + |S_n - S_{n-1}|$$

platí

$$|S_n| \leq \xi_n,\quad |S_T| \leq \xi_T, \tag{D.1}$$

$$\xi_n \leq \xi_{n+1} \leq \dots \tag{D.2}$$

Ukážeme, že $E\,S_T$ je konečná.

Z předpokladů věty a definice martingalu postupně dostaneme:

$$E|S_T| \leq E\,\xi_T = \sum_{n=1}^{\infty} E(\xi_n I\{T = n\}) =$$
$$= E|S_1| I\{T=1\} + E(|S_1| + |S_2 - S_1|)\, I\{T=2\}) + \dots =$$

$$= E|S_1| + E(|S_2-S_1|\, I\{T\geq 2\}) + \ldots + E(|S_n-S_{n-1}|\, I\{T\geq n\}) + \ldots$$

$$= E|S_1| + E[I\{T>1\} E(|S_2-S_1| \,|\, \mathcal{F}_1)] + \ldots +$$

$$+ E[I\{T>n-1\}\, E(|S_n-S_{n-1}| \,|\, \mathcal{F}_n)] + \ldots \leq$$

$$\leq E|S_1| + \alpha \sum_{n=1}^{\infty} P(T>n-1).$$

Poslední výraz je konečný vzhledem k předpokladu $ET < +\infty$ a $E|S_1| < +\infty$. Tím jsme dokázali první tvrzení.

Pokud se týče druhého tvrzení platí

$$\text{(D.3)} \qquad E\, S_T = \int_{\{T\leq n\}} S_T\, dP + \int_{\{T>n\}} S_T\, dP.$$

Z konečnosti $E\, S_T$ a $E\, T$ plyne

$$\text{(D.4)} \qquad \lim_{n\to\infty} \int_{\{T>n\}} S_T\, dP = 0.$$

Pro $n > j$

$$E(S_n\, I\{T=j\} / \mathcal{F}_j) = I\{T=j\}\, E(S_n / \mathcal{F}_j) =$$

$$= I\{T=j\}\, E(S_n / \mathcal{F}_j) = I\{T=j\}\, S_j, \quad \text{sk.j.}$$

Odtud dostáváme

$$\int_{\{T\leq n\}} S_T dP = \sum_{j=1}^{n} \int_{\{T=j\}} S_j\, dP = \sum_{j=1}^{n} \int_{\{T=j\}} S_n\, dP =$$

$$= \int_{\{T\leq n\}} S_n\, dP = \int S_n\, dP - \int_{\{T>n\}} S_n\, dP =$$

$$\text{(D.5)} \qquad = E\, S_1 - \int_{\{T>n\}} S_n\, dP$$

Nyní z (D.1-2) obdržíme

$$(D.6) \qquad \int_{\{T>n\}} |S_n| dP \leq \int_{\{T>n\}} \xi_n \, dP \leq \int_{\{T>n\}} \xi_T \, dP.$$

Poslední výraz na pravé straně konverguje k nule pro $n \to \infty$ a druhé tvrzení věty nyní plyne z (D.3–D.6). ▨

Jako důsledek dostaneme Waldovy rovnosti:

Waldova rovnost I. Nechť $\{X_i\}_{i=1}^{\infty}$ je posloupnost nezávislých stejně rozdělených náhodných veličin s konečnou střední hodnotou. Nechť T je markovský čas vzhledem k $\{\mathcal{G}(X_1, \ldots, X_n)\}_{n=1}^{\infty}$ a má konečnou střední hodnotu. Pak

$$E\, S_T = ET .\, EX_1,$$

kde

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i .$$

Poznámka. Pokud existuje k přirozené takové, že $P(T=k)=1$ je tvrzení věty elementární (střední hodnota součtu nezávislých náhodných veličin je rovna součtu středních hodnot). Zde však tvrzení říká, že střední hodnota součtu náhodného počtu nezávislých stejně rozdělených náhodných veličin je rovna střední hodnotě jednoho sčítance vynásobené střední hodnotou počtu sčítanců.

Důkaz Waldovy rovnosti I: Zřejmě $\{Y_n, \mathcal{G}(X_1, \ldots, X_n)\}_{n=1}^{\infty}$, kde $Y_n = S_n - n\, EX_1$, tvoří martingal.
Navíc

$$E(|Y_{n+1} - Y_n| \,|\, Y_1, \ldots, Y_n) = E(|S_{n+1} - S_n - EX_1| \,|\, X_1, \ldots, X_n) =$$

$$= E(|X_{n+1} - EX_1| \,|\, X_1, \ldots, X_n) = E|X_{n+1} - EX_1| = 2E|X_1| < +\infty$$

Potom podle tvrzení Věty D.1 platí

$$E\,Y_T = E\,Y_1 = 0 \tag{D.7}$$

a tedy

$$0 = E\,Y_T = \int_{T<+\infty} (S_T - T E X_1)\,dP = ES_T - ET.EX_1. \quad ▨$$

__Waldova rovnost II.__ Nechť jsou splněny předpoklady Waldovy rovnosti I. Nechť $E\,X_i = 0$, $E\,X_i < +\infty$ a nechť existuje α takové, že jev $\{T > n\}$ implikuje $\{|S_n| < \alpha\}$ s.j. pro vš. n. Pak

$$\operatorname{var} S_T = E\,T \operatorname{var} X_1,$$

kde $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$.

__Poznámka.__ Předpoklad, že $\{T > n\}$ implikuje $\{|S_n| < \alpha\}$ s.j. znamená, že T indikuje výstup posloupnosti $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ z omezené množiny.

__Důkaz Waldovy nerovnosti II.__ Položme

$$Y_n = S_n^2 - n\,E\,X_1^2 .$$

Přímým výpočtem ověříme, že $\{(Y_n, \sigma(X_1,\dots,X_n))\}_{n=1}^{\infty}$ tvoří martingal.

Dále platí

$$E(S_n^2 | Y_1,\dots,Y_{n-1}) = S_{n-1}^2 + 2\,E(S_{n-1}X_n | S_1,\dots,S_{n-1}) +$$

$$+ E(X_n^2 | S_1,\dots,S_{n-1}) = S_{n-1}^2 + 2\,S_{n-1}\,E\,X_n + E\,X_n^2 =$$

$$= S_{n-1}^2 + E\,X_n^2.$$

Tudíž

$$E(Y_n|Y_1,\dots,Y_{n-1}) = S_{n-1}^2-(n-1)E\,X_1^2 = Y_{n-1} \quad .$$

Nyní ověříme splnění předpokladů Věty D.1. Jev $\{T > n\}$ implikuje

$$E(|Y_{n+1}-Y_n||Y_1,\dots,Y_n) = E(|S_{n+1}^2-S_n^2-EX_1^2||S_1,\dots,S_n) \leq$$

$$\leq E\,X_1^2 + E(X_{n+1}^2|S_1,\dots,S_n)+2\,E(X_{n+1}\,S_n|S_1,\dots,S_n) =$$

$$= 2\,E\,X_1^2 + 2|S_n|E|X_1| \leq 2\,E\,X_1^2 + 2\,\alpha\,E|X_1| \quad \text{sk.j.}$$

Tudíž podle Věty D.1 máme

$$E\,Y_T = 0.$$

Naše tvrzení nyní plyne obdobně jako Waldova rovnost I z (D.7). ∎

Příklad. Nechť $\{X_i\}_{i=1}^{\infty}$ je posloupnost nezávislých náhodných veličin s rozdělením $P(X_i=1) = P(X_i=-1) = 1/2$.
Nechť

$$T = \min\left\{n;\ \sum_{i=1}^{n} X_i \notin (-a,a)\right\},$$

kde $a \in \mathcal{N}$. Pak

$$E\,T = \frac{E\,S_T^2}{E\,X_1^2} = a.$$

Waldova fundamentální identita. Nechť $\{X_i\}_{i=1}^{\infty}$ je posloupnost nezávislých stejně rozdělených náhodných veličin takových, že $1 \leq \varphi(t_1) = E\exp\{t_1 X_1\} < +\infty$ pro nějaké $t_1 \in R^1$.
Nechť T je markovský čas vzhledem k $\{\mathcal{G}(X_1,\dots,X_n)\}_{n=1}^{\infty}$ s $ET < +\infty$ a takový, že existuje $\alpha > 0$ s vlastností: jev $\{T > n\}$ implikuje jev $\left\{|\sum_{i=1}^{n} X_i| \leq \alpha\right\}$ sk.j. Potom

$$E\left(\exp\left\{t_1 \sum_{i=1}^{T} X_i\right\} (\varphi(t_1))^{-T}\right) = 1.$$

Důkaz. Položme

$$Y_n = \exp\left\{t_1 \sum_{i=1}^{n} X_i\right\} (\varphi(t_1))^{-n}.$$

Posloupnost $\{(Y_n, \sigma(X_1,\dots,X_n))\}_{n=1}^{\infty}$ tvoří martingal, neboť

$$E(Y_n | X_1,\dots,X_{n-1}) = \exp\left\{t_1 \sum_{i=1}^{n-1} X_i\right\} E \exp\{t_1 X_n\} (\varphi(t_1))^{-n} = Y_{n-1}$$

sk.j.

Dále

$$E(|Y_{n+1} - Y_n| | X_1,\dots,X_{n-1}) = (\varphi(t_1))^{-n} E(|\exp\{t_1 \sum_{i=1}^{n+1} X_i\} \cdot$$

$$(\varphi(t_1))^{-1} - \exp\left\{t_1 \sum_{i=1}^{n} X_i\right\} | | X_1,\dots,X_n) =$$

$$= (\varphi(t_1))^{-n} \exp\left\{t_1 \sum_{i=1}^{n} X_i\right\} E(|\exp\{t_1 X_{n+1}\} (\varphi(t_1))^{-1} - 1|).$$

Vzhledem k předpokladům naší věty jev $\{T > n\}$ implikuje, že že poslední výraz je sk.j. shora omezen konstantou. Z věty D.1 plyne tvrzení, které jsme měli dokázat. ▨

Je-li $\varphi(t) = E \exp\{t X_1\} < +\infty$ pro vš. $t \in R^1$ plyne existence bodu $t_1 \neq 0$ s vlastností $1 \leq \varphi(t_1) < +\infty$ z věty D.3 (str. 122).

Příklad. Nechť $\{X_i\}_{i=1}^{\infty}$ je posloupnost nezávislých náhodných veličin s normálním rozdělením $N(\mu, \sigma^2)$. Pak

$$\varphi(t) = \exp\left\{\frac{t^2}{2} \sigma^2 + t\mu\right\}$$

a rovná se 1 pro $t=0$ a $t = -\frac{2\mu}{\sigma^2}$.

Platí tedy např.

$$E \exp\left\{-\frac{2\mu}{\sigma^2} \sum_{i=1}^{T} X_i\right\} = 1,$$

kde T je markovský čas vzhledem k $\{\sigma(X_1,\ldots,X_n)\}_{n=1}^{\infty}$ splňující předpoklady Waldovy fundamentální identity.

Nyní si odvodíme několik vlastností momentové vytvořující funkce $\varphi(t) = E\, e^{tX}$, $t \in R^1$, které jsou užitečné při aplikaci Waldovy fundamentální identity.

__Věta D.2.__ Budiž $\varphi(t) = E \exp\{t X\} < +\infty$ pro $t=b,-b$; $b>0$. Pak platí:

a) $\varphi(t)$ je konečná pro vš. $t \in \langle -b,b \rangle$;

b) $\varphi(t)$ je spojitá a konvexní na $\langle -b,b \rangle$;

c) $\varphi(t)$ má konvexní spojité derivace všech řádů na $(-b,b)$;

d) $E|X|^r < +\infty$ pro vš. $r \geq 1$, $\varphi^{(r)}(0) = E\, X^r$.

__Důkaz__ a) Zřejmě platí

$$e^{tx} \leq \max(1, e^{|b|x}) \quad \text{pro} \quad |t| \leq b, \quad x \in R^1.$$

Funkce na pravé straně je integrovatelná, tj.

$$E \max(1, e^{|b|X}) < +\infty ,$$

tedy i $\varphi(t) < +\infty$ pro vš. $t \in \langle -b,b \rangle$.

b) Zřejmé.

c) Stačí najít integrovatelnou majorantu pro r-tou parciální derivaci funkce e^{tx} vzhledem k t v každém intervalu $\langle -a,a \rangle$, $0<a<b$.

Vztah

$$e^{|(b-a)x|} \geq \frac{|(b-a)x|^r}{r!} \qquad r=1,2,\ldots$$

implikuje

$$|x|^r e^{tx} \leq r!\, e^{tx}(b-a)^{-r} e^{(b-a)x} \leq r!\,(b-a)^{-r} e^{bx} \quad \text{pro} \quad x>0,\ t \in \langle -a,a \rangle$$

$$|x|^r e^{tx} \leq r!\, e^{tx}(b-a)^{-r} e^{-(b-a)x} \leq r!\,(b-a)^{-r} e^{-bx} \quad \text{pro} \quad x<0,\ t \in \langle -a,a \rangle.$$

Funke $r!(b-a)^{-r}\, e^{-bx}$ je integrovatelná vzhledem k x při pevném r. Tvrzení c) nyní plyne z Věty 109 [14].

d) Plyne bezprostředně z důkazu c). ▨

__Věta D.3__ Budiž $\varphi(t) = E\, e^{tX} < +\infty$ pro vš. $t \in R^1$, $P(X<0)>0$, $P(X>0)<0$. Pak platí:

a) je-li $EX \neq 0$, existuje právě jeden bod $t_o \neq 0$ takový, že $\varphi(t_o) = 1$;

b) je-li $EX = 0$, $\varphi(t) = 1$ implikuje $t = 0$.

__Důkaz:__ Ukážeme si, že

$$\lim_{t \to \pm\infty} \varphi(t) = +\infty . \tag{D.8}$$

Z $P(X>0)>0$ plyne existence čísla $\varepsilon > 0$ takového, že $P(X>\varepsilon)>0$. Aplikací Markovovy nerovnosti dostaneme pro $t>0$

$$0 < P(X>\varepsilon) = P(e^{tX} > e^{t\varepsilon}) \leq \varphi(t)\, e^{-t\varepsilon} .$$

Odtud a z faktu, že $\lim\limits_{t\to\infty} e^{t\varepsilon} = +\infty$ plyne (D.8) pro $t\to\infty$.
Tvrzení pro $t \to -\infty$ lze odvodit obdobně.
Funkce $\varphi(t)$ je spojitá konvexní, má konečné derivace všech řádů, platí pro ni (D.8) a $\varphi'(0) = E\,X$. Odtud již plyne tvrzení věty. ▨

Za předpokladu Věty D.3 z platnosti $\varphi'(0) = E\,X = 0$ plyne, že funkce $\varphi(t)$ nabývá minimum v bodě $t = 0$ a $\varphi(0) = 1$.

Je-li $0 < E\,X = \varphi'(0)$, plyne z Věty D.3 , že funkce $\varphi(t)$ rostoucí v bodě $t=0$ a bod $t_o \neq 0$ s vlastností $\varphi(t_o)=1$

je $t_o < 0$. Obdobně $0 > EX = \varphi'(0)$ implikuje, že funkce $\varphi(t)$ je klesající v bodě $t=0$ a pro bod $t_o=0$ s vlastností $\varphi(t_o)=1$ platí $t_o > 0$.

Na závěr si dokážeme dvě tvrzení týkající se konečnosti momentové vytvořující funkce $\varphi(t)$ markovského času pro $t \leq t_o$, $t_o > 0$. První věta se týká případu, kdy markovský čas je doba 1.výstupu z omezené borelovské množiny. Druhá věta se týká případu, kdy markovský čas je doba 1.výstupu z borelovské množiny, která se mění s časem.

Věta D.4. Nechť $\{X_i\}_{i=1}^{\infty}$ je posloupnost nezávislých stejně rozdělených náhodných veličin takových, že $P(X_i \neq 0) > 0$. Nechť B je omezená borelovská množina obsahující 0 a nechť

$$T = \min\{n; \sum_{i=1}^{n} X_i \notin B\} .$$

Pak T je markovský čas vzhledem k $\{\sigma(X_1,\dots,X_n)\}_{n=1}^{\infty}$ a $\psi(t) = E\exp\{tT\}$ je funkce konečná v některém intervalu $(-\infty, t_o)$, $t_o > 0$ a tedy $ET^r < +\infty$ pro vš. $r \geq 1$.

Důkaz. Stačí dokázat jen 2.část tvrzení. Označme

$$d = \sup\{x-y;\ x,y \in B\} .$$

a) Nejprve předpokládejme, že

$$P(|X_1| \leq d) = p < 1,$$

tj. $\sum_{u=1}^{n} X_u$ může s kladnou pravděpodobností opustit množinu B jedním krokem.

Pak platí

$$P(T \geq k) = P(S_j \in B,\ 1 \leq j \leq k-1) \leq P(X_1 \in B, |X_2| \leq d, \dots, |X_{k-1}| \leq d) =$$

$$= P(X_1 \in B)\ p^{k-2}.$$

Tudíž

$$\psi(t) \leq \sum_{k=1}^{\infty} e^{tk} P(T \geq k) \leq P(X_1 \in B)\ p^{-2} \sum_{k=1}^{\infty} (pe^t)^k < +\infty$$

pro $pe^t < 1$. Tím jsme dokázali tvrzení věty pro případ a).

b) Z předpokladů věty plyne existence čísla $D > 0$ takového, že aspoň jedna z pravděpodobností $P(X_i < -D)$, $P(X_i > D)$ je kladná. Předpokládejme, že $P(X_i > D) = q > 0$. Pak pro $m = \left[\frac{d}{D}\right] + 1$, kde $[\cdot]$ označuje celou část,

$$P\left(\sum_{i=1}^{m} X_i > d\right) \geq P\left(\min_{1 \leq i \leq m} X_i > D\right) = q^m > 0.$$

Definujme si nyní náhodné veličiny

$$X_i^* = \sum_{k=1}^{m} X_{im+k}, \qquad i=1,2,\ldots .$$

Tyto nové náhodné veličiny jsou nezávislé, stejně rozdělené, mají konečnou střední hodnotu a $P(|X_i^*| > d) > 0$. Použijeme-li nyní postup a), dostaneme

$$\psi^*(t) = E \exp\{t\, T^*\} < +\infty$$

pro $P(|X_i^*| > d)\, e^t < 1$, kde $T^* = \min\left\{n;\ \sum_{i=1}^{n} X_i^* \in B\right\}$.

Zřejmě $T \leq T^* m$ a tedy $\psi(t)$ je konečná v nějakém okolí nuly. ∎

P̲ř̲í̲k̲l̲a̲d̲. Nechť $\{X_i\}_{i=1}^{\infty}$ je posloupnost nezávislých stejně rozdělených náhodných veličin s konečnou střední hodnotou a

$$T = \min\left\{n;\ \sum_{i=1}^{n} X_i \notin (b,a)\right\}, \quad -\infty < b < 0 < a < +\infty$$

pak je $\psi(t) = E\, e^{tT}$ konečná v okolí 0, $ET < +\infty$ a

$$ET.EX_1 = E\left(\sum_{i=1}^{T} X_i\right).$$

Příklad. Nechť $\{X_i\}_{i=1}^{\infty}$ je posloupnost nezávislých náhodných veličin s rozdělením $P(X_i=1) = P(X_i=-1) = 1/2$ a

$$T = \min\left\{n;\ \sum_{i=1}^{n} X_i > 0\right\}.$$

Pak

$$ET = \sum_{k=0}^{\infty} P(T \geq k) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} P\Big(\sum_{i=1}^{j} X_i > 0),\ j=1,\dots,k-1\Big) = +\infty,$$

$$\sum_{i=1}^{T} X_i = 1, \quad E\sum_{i=1}^{T} X_i = 1,$$

$$E X_i = 0.$$

Věta D.5. Nechť $\{X_i\}_{i=1}^{\infty}$ je posloupnost nezávislých stejně rozdělených náhodných veličin takových, že

$$P(X_1 - c_1 < 0) > 0, \qquad P(X_1 - c_2 > 0) > 0.$$

Definujme

$$T = \min\left\{n;\ \sum_{i=1}^{n} X_i \notin (b_1+nc_1, a_1+nc_1) \cup (b_2+nc_2, a_2+nc_2)\right\},$$

kde $b_j < 0 < a_j$ $j=1,2$, $c_1 < c_2$ jsou reálná čísla. Pak T je markovský čas vzhledem k $\{\sigma(X_1,\dots,X_n)\}_{n=1}^{\infty}$ a $\psi(t) = E\exp\{tT\}$ je funkce konečná v některém invervalu $(-\infty, t_o)$, $t_o > 0$ a tedy $E\,T^r < +\infty$ pro vš. $r \geq 1$.

Důkaz: Vzhledem k důkazu Věty D.4 stačí předpokládat, že

$$\max_{i=1,2} P(|X_1 - c_i| < a_i - b_i) = p < 1. \tag{D.9}$$

Zvolme číslo $p_o > 0$ takové, že $p_o + p < 1$. Pak existuje přirozené číslo n_o takové, že pro vš. $n \geq n_o$ platí

$$\text{(D.10)}\qquad \max(P(X_1-c_1> + b_2-a_1+ n(c_2-c_1)),\ P(X_1-c_2< a_1-b_2 - n(c_2-c_1))) \leqq p_o \ .$$

Lze psát pro $k \geqq n_o$

$$\text{(D.11)}\qquad \{T>k\} \subset \bigcup_{\nu=0}^{k-n_o} \bigcup_{n_o \leqq i_1 \ldots i_\nu \leqq k} (A_k^1(i_1,\ldots,i_\nu) \cup A_k^2(i_1,\ldots,i_\nu)),$$

kde

$$A_k^1(i_1,\ldots,i_\nu) = \Big\{ \sum_{j=1}^{m}(X_j-c_1) \in (b_1,a_1),\quad m=n_o,n_o+1,\ldots,i_1-1,$$

$$\sum_{j=1}^{m}(X_j-c_2) \in (b_2,a_2),\quad m=i_1,\ldots,i_2-1,\ldots \Big\}$$

$$A_k^2(i_1,\ldots,i_\nu) = \Big\{ \sum_{j=1}^{m}(X_j-c_2) \in (b_2,a_2),\quad m=1,\ldots,i_1-1;$$

$$\sum_{j=1}^{m}(X_j-c_1) \in (b_1,a_1),\quad m = i_1,\ldots,i_2-1;\ldots \Big\} \quad .$$

Z (D.9.-10) plyne (viz důkaz věty D.4) existence k_o takového, že pro vš. $k \geqq k_o$ platí

$$P(A_k^1(i_1,\ldots,i_\nu) \leqq P(|X_1-c_1| \leqq a_1-b_1, |X_2-c_1| \leqq a_1-b_1,\ldots$$

$$\ldots |X_{i-1}-c_1| \leqq a_1-b_1,\ X_{i_1} - c_2 > b_2-a_1 + i_1 (c_2-c_1),$$

$$|X_{i_1+1} -c_2| \leqq a_2-b_2 \ldots) \leqq p_o^\nu\, p^{k-\nu+1-n_o} \ .$$

Podobně máme

$$P(A_k^2(i_1,\ldots,i_\nu)) \leqq p_o^\nu\, p^{k-\nu+1-n_o} \quad ,$$

což spolu s (D.11) implikuje

$$P(T>k) \leqq 2 \sum_{\nu=0}^{k-1} \binom{k-1}{\nu} p_o^\nu\, p^{k-\nu+1-n_o} = 2(p_o+p_1)^{k-1} p^{2-n_o} :$$

pro $k \geqq k_o$. Důkaz nyní dokončíme obdobně jako ve Větě D.4. ▨

LITERATURA

[1] Anděl,J.: Matematická statistika, SNTL, Praha 1978.

[2] Anscombe,F.J.: Tables of sequential inspection schemes to control fraction defective, JRSSA,112,1949, 180-206.

[3] Armitage,P.: Sequential medical trials, Blackwell,1960.

[4] Bartlett,M.S.: The large-sample theory of sequential tests, Proc.Camb.Phil.Soc.42,1946, 239-244.

[5] Berger,J.O.: Statistical decision theory, Springer-Verlag, 1980.

[6] Berk,R.H.: Some asymptotic aspects of sequential analysis, Ann.Math.Statist.,1,1973, 1126-1138.

[7] Berk,R.H.: Asymptotic efficiences of sequential tests Ann.Math.Statist.,4, 1976, 891-911.

[8] Cox,D.R.: Large sample sequential tests for composite hypotheses, Sankhya A,25,1963, 5-12.

[9] Dodge,H.F. a Ramig,H.G.: Sampling Inspection Tables, Wiley,1959.

[10] Ghosh,B.G.: Sequential tests of statistical hypotheses, Reading, Mass, 1970.

[11] Govindarajulu,C.: Sequential statistical procedures, New York,1975.

[12] De Groot,M.H.: Optimal statistical decisions, Mc Craw-Hill,1970 (ruský překlad: Optimalnyje statističeskije rešenija, Mir, Moskva 1974).

[13] Chow,Y.S., Robins,H.: On the asymptotic theory of fixed-width sequential confidence intervals for the man, Ann.Math.Statist.,36,1965, 457-462.

[14] Jarník,V.: Diferenciální počet I,II,Praha NČSAV,1955-56.

Jarník,V.: Integrální počet I,II,Praha NČSAV,1955-56.

[15] Jurečková,J.: Neparametrické metody (skripta),SPN 1981.

[16] Lehmann,E.L.: Testing statistical hypotheses, Wiley 1959 (ruský překlad:Proverka statističeskich gipotěz).

[17] Miller,R.G.,Jr.: Sequential signed rank test, JASA 65, 1970, 1554-1561.

[18] Rao,R.C.: Lineární metody statistické indukce a jejich aplikace, Academia Praha,1978.

[19] Renyi,A.: Teorie pravděpodobnosti, Academia Praha,1972.

[20] Slater,L.J.: Confluent Hypergeometric Functions,Cambridge Univ.Press, 1960.

[21] Stein,C.: A two sample test for a linear hypothesis whose power is independent of the variance, Ann.Math. Statist. 16, 1945, 243-258.

[22] Tables to Facilitate Sequential t-Tests.(1951).

[23] Wald,A.: Sequential analysis, Wiley 1950 (ruský překlad: Posledovatelnyj analiz, FIZMATGIZ,Moskva,1960).

[24] Wetherill,G.B.: Sequential Methods in Statistics, Wiley (1966).

[25] Wijsmann,R.A.: Existence uniqueuess and monotonicity of sequential probability ratio tests, Ann.Math.Statist. 34, 1963, 1541-48.

[26] Wilks,S.S.: Mathematical Statistics, Wiley, New York,1962.

[27] Wolfowitz,J.: The efficiency of sequential estimates and Wald's equation for sequential processes, Ann.Math. Statist., 18, 1947, 215-230.

E r r a t a

m í s t o		m á b ý t
14^{11}	klesající funkce	rostoucí funkce
16^{8}	$X_{n+1}))$, kde	$X_{n+1}))$, jestliže $(X_1,\dots,X_n)\in B_n$, kde
20^{6}	$Q_n = \prod_{i=1}^{n} \frac{P(X_i=1;p_1)}{P(X_i=1;p_0)}$	$Q_n = \prod_{i=1}^{n} \frac{P(X_i;p_1)}{P(X_i;p_0)}$
24	(1.28) doplnit $L_S(\theta^{\circ})\neq 0$ (1.29) doplnit $P_S(\theta^{\circ})\neq 0$	
25^{15-16}	(a,b konečná čísla)	0
25_{5}	metru θ, pak	metru θ, $\{B_n\}_{n=1}^{\infty}$ jsou omezené (sup $\|x\| \leq K$ n=1,...,n), pak $x \in B_n$
30^{10}	$E_{S^*}(N;\theta) < E_S(N,\theta)$ pro vš. $\theta\in\Theta_1$	$E_{S^*}(N;\theta \leq E_S(N;\theta)$ pro vš. $\theta\in\Theta_1$, přičemž aspoň pro jedno $\theta\in\Theta_1$ platí nerovnost ostrá
30_{1}	test poměru	test poměrem
54^{9}, $54_{6,7}$	N_o	n_o
96_{5}	$n < M$	$n \leq M$,
97	v tabulce N	M
109^{4}	$\bar{X}_{N(c)} \to \infty$	$\bar{X}_{N(c)} \to \mu$
105	$\theta \in (\underline{\theta}, \bar{\theta})$	$\theta \in (\underline{\theta}, \bar{\theta})$ pro vš. n přir.