Řešení zápočtové písemky z 4. 4. 2002

1. Pravděpodobnosti obou jevů určíme pomocí doplňkových jevů. Pravděpodobnost, že existuje aspoň jedna dvojice, která má narozeniny ve stejný den je

$$1 - \frac{365 \cdot 364 \cdot \ldots \cdot (365 - n + 1)}{365^n}.$$

Samozřejmě předpokládáme, že je $n \leq 365$ (více studentů by se asi nesešlo). Kdyby bylo $n > 365$, tak je daná pravděpodobnost zřejmě 1. Pravděpodobnost, že existuje aspoň jeden student, který má narozeniny dnes je

$$1 - \left(\frac{364}{365}\right)^n.$$

2A. Pravděpodobnost, že právě k z veličin nabyde hodnoty 1 (a tudíž zbylých $n-k$ hodnoty -1), je $\binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$. To znamená, že

$$P(Y = 2k - n) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}, \quad \text{kde } k = 0, \ldots, n.$$

Po substituci dostaneme

$$P(Y = j) = \binom{n}{\frac{n+j}{2}} p^{\frac{n+j}{2}} (1-p)^{\frac{n-j}{2}}, \quad \text{kde } j = -n, -n-2, -n-4, \ldots, n-2, n.$$

Střední hodnota součtu nezávislých veličin je součet středních hodnot a rozptyl součtu nezávislých veličin je součet rozptylů jednotlivých veličin. Náhodné veličiny $X_1, \ldots, X_n$ mají stejné rozdělení. Spočtěme střední hodnotou a rozptyl

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}X_i &= p \cdot 1 + (1-p) \cdot (-1) = 2p - 1, \\
\mathrm{E}(X_i)^2 &= p \cdot 1 + (1-p) \cdot (-1)^2 = 1, \\
\operatorname{var} X_i &= \mathrm{E}(X_i)^2 - (\mathrm{E}X_i)^2 = 1 - (2p-1)^2 = 4p(1-p).
\end{aligned}$$

Odtud máme

$$\mathrm{E}Y = n(2p-1), \quad \operatorname{var} Y = 4np(1-p).$$

2B. Distribuční funkce náhodné veličiny je

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(y)\, \mathrm{d}y.$$

Pro $x \in (0, \pi)$ platí

$$F(x) = \frac{1}{2} \int_0^x \sin y \, \mathrm{d}y = \frac{1}{2} \Big[-\cos y \Big]_0^x = \frac{1}{2}(1 - \cos x).$$

Pro $x \leq 0$ je $F(x) = 0$ a pro $x \geq \pi$ je $F(x) = 1$. Celkem lze tedy vyjádřit distribuční funkci jako

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0, \\ \frac{1}{2}(1 - \cos x) & 0 < x < \pi, \\ 1 & x \geq \pi. \end{cases}$$

Střední hodnota je

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}X &= \int_{-\infty}^{\infty} x f(x)\, \mathrm{d}x = \int_0^{\pi} x \sin x \, \mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2} \left(\Big[-x \cos x \Big]_0^{\pi} + \int_0^{\pi} \cos x \, \mathrm{d}x \right) = \frac{\pi}{2} + 0 = \frac{\pi}{2}.
\end{aligned}$$