Zápočtová písemka MAI010 – 17. 5. 2005

1. Nechť $X_1, \dots, X_n$ je náhodný výběr z normálního rozdělení N(1,16). Jak velké n je třeba zvolit, aby $P(\bar{X}_n \geq 0) = 0{,}99$, kde $\bar{X}_n$ značí aritmetický průměr.

2. Nechť $X_1, \dots, X_n$ je náhodný výběr z normálního rozdělení $N(\mu, 4)$. Metodou maximální věrohodnosti určete odhad parametru μ. Spočtěte rozptyl tohoto odhadu.

3. Má se rozhodnout, zda se u osobního automobilu určité značky při správném seřízení geometrie vozu sjíždějí obě přední pneumatiky stejně rychle. Bylo proto vybráno 6 nových vozů a po určité době bylo zjištěno, o kolik milimetrů se sjely jejich pravé a levé přední pneumatiky.

Číslo automobilu	1	2	3	4	5	6
Pravá pneumatika	1,8	1,0	2,2	0,9	1,5	1,6
Levá pneumatika	1,5	1,1	2,0	1,1	1,4	1,4

Lze na základě získaných dat zamítnout hypotézu, že se obě přední pneumatiky sjíždějí stejně rychle?

4. Za předpokladu normality platí pro odhad b_0 parametru β_0 v jednoduché lineární regresi, že

$$T = \frac{b_0 - \beta_0}{S\sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}} \sqrt{n \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}$$

má t-rozdělení o $n-2$ stupních volnosti. Sestrojte oboustranný intervalový odhad pro β_0 o spolehlivosti $1-\alpha$.

Zápočtová písemka MAI010 – 18. 5. 2005

1. Mějme náhodný výběr z normálního rozdělení $N(\mu, 1)$ o rozsahu 10. Určete konstantu k tak, aby výběrový rozptyl $S^2 = \frac{1}{9}\sum_{i=1}^{10}(X_i - \bar{X})^2$ splňoval $P(S^2 \leq k) = 0{,}95$.

2. Nechť $X_1, \dots, X_n$ je náhodný výběr z binomického rozdělení s parametry $m \in \mathbb{N}$ a $p \in (0,1)$, tj. $P(X_i = k) = \binom{m}{k} p^k (1-p)^{m-k}$ pro $k = 0, \dots, m$ a $i = 1, \dots, n$. Považujme m za známé. Určete odhad parametru p momentovou metodou. Rozhodněte, zda je tento odhad nestranný a konzistentní. Určete jeho rozptyl.

3. Nechť $X_1, \dots, X_{100}$ je náhodný výběr z normálního rozdělení $N(\mu, 16)$. Určete oboustranný 95% interval spolehlivosti pro parametr μ, jestliže výběrový průměr je $\bar{X} = 3$. Jak by se změnila délka tohoto intervalu, kdybychom požadovali spolehlivost 99% (zvětšila, zmenšila nebo zůstala stejná)?

4. Za poslední čtyři roky byly v České republice počty osobních počítačů na 100 domácností následující:

14,2   17,8   23,2   26,8.

Pro zjištění závislosti počtu počítačů na čase použijte jednoduchou lineární regresi. Popište tento model, zformulujte jeho předpoklady a odhadněte neznámé parametry.

Zápočtová písemka MAI010 – 19. 5. 2005

1. Nechť $X_1, \dots, X_n$ je náhodný výběr z normálního rozdělení $N(\mu, 16)$. Kolik pozorování by bylo třeba provést, aby oboustranný 90% interval spolehlivosti pro μ nebyl širší než 1?

2. Uvažujme hustotu ve tvaru $f(x) = (a+1)x^a$ pro $x \in (0,1)$, kde $a > -1$ je reálný parametr. Nechť $X_1, \dots, X_n$ je náhodný výběr z rozdělení s hustotou f. Odhadněte parametr a metodou maximální věrohodnosti.

3. Nechť $X_1, \dots, X_{25}$ je náhodný výběr z normálního rozdělení $N(\mu, \sigma^2)$. Byly vypočteny tyto hodnoty výběrového průměru a výběrového rozptylu: $\bar{X} = 5{,}8$, $S^2 = 4$.

a) Testujte na 5% hladině nulovou hypotézu $H_0 : \mu = 5$ proti alternativní $H_1 : \mu \neq 5$. Změní se naše rozhodnutí, pokud uvažujeme jednostrannou alternativu $H_1 : \mu > 5$?

b) Při testu $H_0 : \mu = \mu_0$ proti $H_1 : \mu > \mu_0$ byla zjištěna p-hodnota $p = 0{,}063$. Jaké rozhodnutí lze učinit na 10% hladině významnosti? Co lze říct o hodnotě μ_0 (je menší, větší nebo rovna 5)?

4. Mějme náhodnou veličinu X, která má rovnoměrné rozdělení na intervalu $(0,1)$, a náhodnou veličinu Y s rovnoměrným rozdělením na intervalu $(-1,1)$. Předpokládejme, že X a Y jsou nezávislé. Označme $U = 2X + Y$. Spočtěte korelační koeficient veličin U a Y.