Zápočtová písemka STP144 – 9. 1. 2006

1. Reálné náhodné veličiny X a Y jsou nezávislé a každá z nich má normované normální rozdělení $N(0,1)$. Spočtěte $\mathrm{E}[|X| \mid X^2+Y^2]$.

2. Nechť Z má Poissonovo rozdělení s náhodným parametrem U, kde U je náhodná veličina s exponenciálním rozdělením s intenzitou 1 (tedy $P(Z=z \mid U=u) = \mathrm{e}^{-u}\frac{u^z}{z!}$, $z=0,1,\ldots$, $u>0$). Najděte rozdělení náhodné veličiny Z a spočtěte $\mathrm{E}[U \mid Z]$.
Nápověda: $\Gamma(n+1) = \int_0^\infty x^n \mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x = n!$

3. Rozhodněte o následujících funkcích, zda jsou nebo nejsou charakteristickými funkcemi nějakých náhodných veličin a své tvrzení zdůvodněte:

a) $\varphi(t) = 2\cos^3 t - \cos t$,

b) $\varphi(t) = \frac{1+i|t|}{1-2i|t|}$,

c) $\varphi(t) = \frac{3\cos t}{1+2\cos^2 t}$,

d) $\varphi(t) = \frac{1}{3-2\mathrm{e}^{-|t|}}$,

e) $\varphi(t) = \exp\{-\min(1,t^2)\}$,

⋆ f) $\varphi(t) = \begin{cases} \mathrm{e}^{-6t^2} & \text{pro } |t| \le 1/2, \\ 8\mathrm{e}^{-3/2}(1-|t|)^3 & \text{pro } 1/2 \le |t| \le 1, \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$

4. Mějme dány spojité funkce $\varphi, \psi : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$. Rozhodněte, zda platí následující tvrzení:

a) Když φ a ψ jsou charakteristické funkce nějakých náhodných veličin, pak $\frac{\varphi+\psi}{2}$ je charakteristická funkce nějaké náhodné veličiny.

b) Pokud $\frac{\varphi+\psi}{2}$ je charakteristická funkce nějaké náhodné veličiny, potom φ a ψ jsou charakteristické funkce nějakých náhodných veličin.

c) Nechť $\varphi(0)=\psi(0)=1$. Když $\frac{\varphi+\psi}{2}$ je charakteristická funkce nějaké náhodné veličiny, potom φ a ψ jsou charakteristické funkce nějakých náhodných veličin.

⋆ d) Nechť $|\varphi(t)| \le \varphi(0) = 1$ a $|\psi(t)| \le \psi(0) = 1$ pro každé $t \in \mathbb{R}$. Pokud $\frac{\varphi+\psi}{2}$ je charakteristická funkce nějaké náhodné veličiny, potom φ a ψ jsou charakteristické funkce nějakých náhodných veličin.