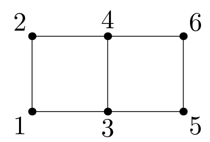
Zápočtová písemka STP038 – 27. 11. 2006

1. Mějme tři přihrádky, do kterých umísťujeme kuličky (každá přihrádka může obsahovat maximálně jednu kuličku). V každém časovém okamžiku vybereme rovnoměrně náhodně jednu z přihrádek. Pokud není obsazena, vložíme do ní kuličku. Pokud je obsazena, s pravděpodobností 1/2 z ní kuličku odebereme a s pravděpodobností 1/2 kuličku ponecháme. Označme X_n počet obsazených přihrádek v čase n.

a) Ukažte, že $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tvoří homogenní Markovův řetězec.
b) Určete matici pravděpodobností přechodu $\mathbb{P}$.
c) Klasifikujte stavy řetězce.
d) Předpokládejte, že počáteční rozdělení je rovnoměrné (každý stav má stejnou pravděpodobnost) a spočtěte absolutní pravděpodobnosti po jednom kroku.
e) Spočtěte stacionární rozdělení (pokud existuje).

2. Uvažujme objekt, který se pohybuje po plánu znázorněném na obrázku. Pohyby jsou pouze mezi šesti vyznačenými body. V každém kroku si objekt vybere jeden ze čtyř směrů (sever, východ, jih, západ – každý se stejnou pravděpodobností) a tímto směrem se vydá. Určeným směrem se pohybuje tak dlouho, dokud je to možné (pokud v daném směru nevede cesta, zůstává na místě). Označme X_n polohu částice po n krocích.

a) Určete matici pravděpodobností přechodu $\mathbb{P}$ markovského řetězce $\{X_n\}$.
b) Klasifikujte stavy řetězce.
c) Určete matici U pravděpodobností absorpce do trvalých stavů.



3. Nechť homogenní Markovův řetězec má matici pravděpodobností přechodu

$$\mathbb{P} = \begin{pmatrix} 0 & p_1 & p_2 & \dots \\ 1 & 0 & 0 & \dots \\ 1 & 0 & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix},$$

kde $0 < p_i < 1$ pro všechna $i \in \mathbb{N}$ a $\sum_{i=1}^{\infty} p_i = 1$. Klasifikujte stavy řetězce a určete stacionární rozdělení (pokud existuje).