

Úlohy ke cvičení STP139 – 5. markovské řetězce a MCMC

1. Necht P_i jsou markovská jádra a π je invariantní míra pro každé i . Ukažte, že následující operace zachovávají invariantní míru:

- (a) skládání jader: $P_1 P_2(x, A) = \int P_2(y, A) P_1(x, dy)$,
 (b) míchání jader: $P = \sum_i p_i P_i$, kde $\sum_i p_i = 1, p_i \geq 0$.

2. Nerozložitelnost se nemusí zachovávat při skládání. Uvažujme $S = \{1, 2, 3\}$ a $P_1(1, 2) = P_1(2, 3) = P_2(1, 3) = P_2(2, 1) = 1, P_i(3, i) = P_i(3, 3) = \frac{1}{2}$ pro $i = 1, 2$. Markovské řetězce s přechodovými jádry P_1 i P_2 jsou neperiodické a nerozložitelné se stacionárním rozdělením $\pi(1) = \pi(2) = \frac{1}{4}, \pi(3) = \frac{1}{2}$, ale $P_1 P_2(1, 1) = 1$, takže $P_1 P_2$ negeneruje nerozložitelný řetězec.

Naproti tomu pro míchání jader platí, že směs $P = \sum_i p_i P_i, \sum_i p_i = 1, p_i \geq 0$, φ -nerozložitelných jader je zase φ -nerozložitelná. Dokažte.

3. Při Gibbsově výběrovém plánu s postupnou aktualizací složek (od první k d -té) je přechodové jádro dané hustotou

$$p(x, y) = \prod_{i=1}^d f(y_i | y_1, \dots, y_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_d).$$

Ukažte, že výsledný řetězec není reverzibilní. Uvažujte modifikaci, při které jeden přechod v řetězci odpovídá aktualizaci všech složek (od první k poslední) následované aktualizací složek v obráceném pořadí (od předposlední k první). Ukažte, že tento řetězec je reverzibilní.

4. Uvažujme pravděpodobnostní rozdělení π na prostoru $\mathcal{X} = \{0, 1\}^2$:

$$\pi(\{i\} \times \{j\}) = \pi_{ij}, \quad i, j \in \{0, 1\}.$$

Definujte Gibbsův výběrový plán pro generování z π a spočítejte pravděpodobnosti přechodu vzniklého markovského řetězce. Určete stacionární rozdělení tohoto markovského řetězce. Za jakých podmínek bude stacionární rozdělení i rozdělením limitním?

5. Necht $X = (X_1, X_2)$ má rozdělení z předchozí úlohy s $\pi_{00} = \pi_{11} = \frac{p}{2}$ a $\pi_{10} = \pi_{01} = \frac{1-p}{2}$. Určete marginální rozdělení X_1 a X_2 . Spočítejte korelační koeficient ρ složek X_1 a X_2 .

Uvažujte markovský řetězec $\{X^{(j)}\}$ vytvořený pomocí Gibbsova výběrového plánu. Ověřte, že platí: $P(X_1^{(j)} = 1 | X_1^{(j-1)} = 1) = P(X_1^{(j)} = 0 | X_1^{(j-1)} = 0) = p^2 + (1-p)^2$. Označme $p_j = P(X_1^{(j)} = 1)$ a ukažte, že $p_j = \rho^2 p_{j-1} + b$, kde $b = 2p(1-p)$, a tedy $p_j \doteq \rho^{2j} p_0 + b(1 - \rho^{2j}) / (1 - \rho^2)$.

Ukažte, že matice pravděpodobností přechodu odpovídající první složce $\{X_1^{(j)}\}$ má vlastní čísla 1 a ρ^2 . Takže řád konvergence řetězce je ρ^2 a ergodicita řetězce je zajištěna pro $p > 0$. Ale pokud je p blízko 0 nebo 1, bude i řád konvergence blízko 1 a tedy bude konvergence k limitnímu rozdělení velmi pomalá.

Ukažte, že v limitě $p_j \rightarrow \frac{b}{1-\rho^2} = \frac{1}{2}$, ale je-li např. $p = 0,999$ je po sto iteracích $p_{100} = 0,67p_0 + 0,164$, což může být (v závislosti na volbě p_0) dost daleko od očekávané limity.

6. (variable-at-a-time MH algoritmus) Chceme generovat z pravděpodobnostního rozdělení s hustotou f na součinném prostoru $\mathcal{X} = \mathcal{X}_1 \times \dots \times \mathcal{X}_d$ vzhledem k součinné míře $\mu = \mu_1 \times \dots \times \mu_d$. Postupně aktualizujeme jednotlivé souřadnice v pevném pořadí následujícím způsobem: generujeme $y \in \mathcal{X}_i$ z návrhového rozdělení s hustotou $q_i(x, \cdot)$ vzhledem k μ_i , návrh y přijmeme s pravděpodobností

$$\alpha(x, y) = \min \left\{ \frac{f(x_y) q_i(x_y, x_i)}{f(x) q_i(x, y)}, 1 \right\},$$

kde $x = (x_1, \dots, x_d)$ a $x_y = (x_1, \dots, x_{i-1}, y, x_{i+1}, \dots, x_d)$. Ukažte, že jednotlivé kroky algoritmu jsou reverzibilní vzhledem k plným podmíněným rozdělením $f(x_i | x_{-i})$.

7. Necht π je pravděpodobnostní rozdělení na $R = \{1, \dots, n\}$. Metropolisův-Hastingsův algoritmus s návrhovou maticí $Q = (q_{ij})$ má matici přechodu $P = (p_{ij})$. Označme $\alpha_{ij} = \min \left\{ \frac{\pi_j q_{ji}}{\pi_i q_{ij}}, 1 \right\}$, potom $p_{ij} = \alpha_{ij} q_{ij}$ pro $i \neq j$ a $p_{ii} = 1 - \sum_{j \neq i} \alpha_{ij} q_{ij}$. Pro $q_{ij} = q_j^*$ (nezávislý výběr) označme $w_i = \frac{\pi_i}{q_i}$ a předpokládejme, že stavy jsou uspořádány tak, že $w_1 \geq w_2 \geq \dots \geq w_n$. Výpočtem ověřte, že vlastní čísla matice P pravděpodobností přechodu jsou $\lambda_1 = 1$ a $\lambda_{k+1} = \sum_{j=k+1}^n \pi_j \left(\frac{1}{w_j} - \frac{1}{w_k} \right)$ pro $k \geq 1$. Příslušné pravé vlastní vektory jsou $v_1 = (1, \dots, 1)^T$ a $v_{k+1} = \underbrace{(0, \dots, 0, \sum_{j=k+1}^n \pi_j, -\pi_k, \dots, -\pi_k)^T}_{k-1}$ pro $k \geq 1$. Jaký je geometrický řád konvergence algoritmu? Které volby návrhového rozdělení vedou k rychlé konvergenci?