Zápočtová písemka STP038 – 26. 11. 2007

1. Nechť $\{Y_n, n \in \mathbb{N}\}$ je posloupnost nezávislých stejně rozdělených náhodných veličin s alternativním rozdělením, tj. $P(Y_n = 0) = 1 - p$, $P(Y_n = 1) = p$, kde $p \in (0,1)$. Položme $X_n = 2Y_n + Y_{n+1}$, $n \in \mathbb{N}$.
a) Zdůvodněte, že $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tvoří homogenní Markovův řetězec.
b) Určete matici pravděpodobností přechodu po n krocích.
c) Klasifikujte stavy řetězce.
d) Určete stacionární rozdělení (pokud existuje).

2. Žil byl v jednom domě králíček Pepíček, který rád často žral. Pokud zrovna nežral, tak se alespoň odebral do obýváku překusovat kabely. K tomu docházelo každou hodinu s pravděpodobností 1/3. Se zbylou pravděpodobností 2/3 si Pepíček pochutnával na dobré potravě a přitom se řídil jistými pevnými pravidly. Pokud v minulé hodině měl seno nebo překusoval kabely, dal si seno. Když si v předchozí hodině dopřával zrní, tak ho odmítal v následující hodině a vybíral si pouze mezi senem a ovocem (obojí se stejnou pravděpodobností). Po ovoci volil rovnoměrně náhodně mezi senem, zrním a ovocem. Spočtěte pravděpodobnost, že pokud začne králík zrním, dostane se dříve k senu než k překusování kabelů.

3. Nechť homogenní markovský řetězec má matici pravděpodobností přechodu

$$\mathbb{P} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & \dots \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix}.$$

Klasifikujte jeho stavy a určete stacionární rozdělení (pokud existuje).