Zápočtová písemka STP038 – 28. 11. 2007

1. Mějme neomezenou zásobu kuliček a k přihrádek. V každém kroku vybereme náhodně jednu přihrádku (každá přihrádka má stejnou pravděpodobnost zvolení) a vhodíme do ní jednu kuličku. Nechť X_n značí počet obsazených přihrádek po n krocích.

a) Zdůvodněte, že $\{X_n, n \in \mathbb{N}\}$ tvoří homogenní Markovův řetězec.
b) Určete matici pravděpodobností přechodu n-tého řádu.
c) Klasifikujte stavy řetězce.
d) Předpokládejte, že na začátku jsou všechny přihrádky prázdné ($P(X_0 = 0) = 1$). Určete absolutní pravděpodobnosti po třech krocích (tj. rozdělení náhodné veličiny X_3).

2. Uvažujme markovský řetězec s maticí pravděpodobností přechodu

$$\mathbb{P} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}.$$

a) Klasifikujte stavy řetězce.
b) Určete stacionární rozdělení (pokud existuje).
c) Určete matici U pravděpodobností absorpce do trvalých stavů.

3. Aneta a Barbora hrají sérii šachových zápasů. Předpokládejme, že každá partie skončí s pravděpodobností 1/3 výhrou Anety, s pravděpodobností 1/3 remízou a s pravděpodobností 1/3 výhrou Barbory. Za výhru se získává jeden bod, za remízu půl bodu. Označme X_n absolutní hodnotu rozdílu získaných bodů obou hráček po n partiích.

a) Určete matici pravděpodobností přechodu Markovova řetězce $\{X_n, n \in \mathbb{N}\}$.
b) Klasifikujte stavy řetězce.
c) Určete stacionární rozdělení (pokud existuje).