Úlohy ke cvičení NSTP154 – kótované bodové procesy

1. Uvažujme kótovaný bodový proces Ψ v $\mathbb{R}^2$, ve kterém body reprezentují polohy určitých rostlin a kóty představují intenzitu šíření semene z dané rostliny do okolí. Předpokládejme, že rostliny produkují semena nezávisle na sobě a že semeno je rozptýleno náhodně kolem mateřské rostliny X podle hustoty $m(X)d(r)$, kde $m(X)$ je kóta příslušná bodu X a r je vzdálenost cílového stanoviště semene od bodu X. Dejme tomu, že nás zajímá celková hustota semena v dané lokalitě $y \in \mathbb{R}^2$, ta je pak dána jako

$$S_y = \sum_{(X,M)\in\Psi} Md(\|y - X\|).$$

Předpokládejte, že Ψ je stacionární a určete střední hustotu semene v bodě y.

2. Mějme stacionární kótovaný bodový proces v $\mathbb{R}^2$, kde body představují polohy ptáků v lese a kóty jsou hlasitosti jejich zpěvu. Pták zpívající na místě $x \in \mathbb{R}^2$ o hlasitosti $m(x)$ je slyšitelný ve vzdálenosti r od x s pravděpodobností $p(r) = 1 - ar/m(x)$ pro $r \leq m(x)/a$. Určete střední počet ptáků, které pozorovatel slyší ze svého místa (z počátku).

3. Nechť Φ je stacionární Poissonův bodový proces na $\mathbb{R}^d$ s intenzitou $\lambda > 0$. Mějme pevné $r > 0$. Každému bodu $X \in \Phi$ přiřadíme kótu, která představuje počet jeho r-sousedů, tj. $M(X) = \sum_{Y\in\Phi} \mathbf{1}_{[0<\|X-Y\|\leq r]}$. Určete míru intenzity takto definovaného kótovaného bodového procesu.

4. Pomocí Campbellovy-Meckeho věty pro stacionární kótované bodové procesy ověřte, že Palmovo rozdělení vzhledem k množině kót $L \in \mathfrak{M}$ lze alternativně definovat pomocí vztahu

$$P_o^L(U) = \frac{1}{\lambda|B|\Lambda_o(L)} \mathbb{E} \sum_{(X,M)\in\Psi} \mathbf{1}_{[(X,M)\in B\times L]} \mathbf{1}_{[\Psi - X \in \mathcal{U}]}, \quad \mathcal{U} \in \mathfrak{N}_{\mathfrak{M}},$$

kde B je libovolná omezená borelovská množina s kladnou Lebesgueovou mírou.

5. Ukažte, že Laplaceův funkcionál Poissonova bodového procesu Φ má tvar

$$L_\Phi(f) = \mathbb{E} \exp\left\{ - \sum_{X\in\Phi} f(X) \right\} = \exp\left\{ - \int_{\mathbb{R}^d} (1 - \mathrm{e}^{-f(x)})\, \Lambda(\mathrm{d}x) \right\}.$$

Návod: Vztah stačí ověřit pro jednoduché funkce.

6. Nechť $Y = \{Y(x) : x \in \mathbb{R}^d\}$ je stacionární gaussovské náhodné pole se s.j. spojitými trajektoriemi $x \to Y(x)$. Definujme náhodnou míru $\Lambda(B) = \int_B \mathrm{e}^{Y(x)}\, \mathrm{d}x$, $B \in \mathcal{B}^d$. Stacionární Coxův proces Φ s řídící mírou Λ se nazývá logaritmicko-gaussovský Coxův proces (LGCP). Řídící funkce intenzity procesu Φ je $Z(x) = \mathrm{e}^{Y(x)}$. Podmíněně při $\{Z(X) : X \in \Phi\}$ nezávisle na sobě okótujeme body procesu Φ tak, že kóta v bodě X je funkcí $Z(X)$. Příkladem je následující kótování:

$$M(X) = a + bZ(X) + \varepsilon(X), \quad X \in \Phi,$$

kde $M(X)$ je kóta v bodě X, a a b jsou reálné parametry a $\{\varepsilon(x) : x \in \mathbb{R}^d\}$ jsou nezávislé náhodné veličiny s normálním rozdělením s nulovou střední hodnotou a rozptylem τ^2, přitom $\{\varepsilon(x) : x \in \mathbb{R}^d\}$ a Λ jsou nezávislé. Případ $b = 0$ znamená nezávislé normálně rozdělené kóty. Případ $b > 0$ modeluje situaci, kdy kóty jsou velké v místech s velkou intenzitou bodů. Oproti tomu $b < 0$ dává malé kóty v místech s velkou intenzitou. Tento způsob kótování se nazývá *kótování závislé na intenzitě (intensity-dependent marking)*. Výsledný kótovaný bodový proces $\Psi = \{(X, M(X)) : X \in \Phi\}$ se nazývá *kótovaný Coxův proces s kótami závislými na intenzitě (intensity-marked Cox process)*. Určete střední typickou kótu a korelační funkci kót tohoto procesu.

Úlohy ke cvičení NSTP154 – procesy s kvalitativními a kvantitativními kótami

1. Uvažujme dvourozměrný nezávisle kótovaný bodový proces. Ukažte, že index míšení je roven $2p_1p_2$.

2. Ukažte, že index segregace dvourozměrného bodového procesu nabývá hodnot z intervalu $[-1, 1]$ a je roven nule pro nezávisle kótovaný proces. Rozhodněte, jaké nejvyšší a nejnižší hodnoty může nabývat v závislosti na p_1.

3. Ukažte, že křížovou G-funkci vícerozměrného bodového procesu lze v případě nezávislého kótování vyjádřit jako

$$G_{ij}(r) = 1 - \mathbb{E}_o^{!i}(1 - p_j)^{\Phi(b(o,r))}.$$

4. Pomocí Campbellovy-Meckeho věty ukažte, že platí

$$\lambda_j K_{ij}(r) = \mathbb{E} \sum_{X \in \Phi_i \cap B} \frac{\Phi_j(b(X,r) \setminus \{X\})}{\lambda_i |B|},$$

kde $B \in \mathcal{B}_0^d$ je libovolná množina s kladnou Lebesgueovou mírou ($|B| > 0$).

5. Nechť Ψ je vícerozměrný bodový proces a nechť $K(r)$ je K-funkce příslušného nekótovaného bodového procesu Φ. Ukažte, že
  a) za předpokladu nezávislého kótování platí $K_{ij}(r) = K(r)$ pro každé i a j,
  b) za předpokladu modelu náhodné superpozice platí $K_{ij}(r) = \omega_d r^d$ pro $i \neq j$.

6. Pro stacionární a izotropní vícerozměrný bodový proces dokažte vztah

$$g_{ij}(r) = \frac{K'_{ij}(r)}{\sigma_d r^{d-1}}, \quad r > 0.$$

7. Dokažte vztah $\kappa_f(r) = \mathbb{E}_{or} f(M(o), M(r))$, $r > 0$.

8. Nechť Ψ je stacionární a izotropní kótovaný bodový proces s geostatistickým kótováním. Vyjádřete $k_{mm}(r)$, $k_{m\cdot}(r)$, $\gamma_m(r)$, $E(r)$ a $V(r)$ jako funkce střední hodnoty a kovarianční funkce (příp. variogramu) příslušného náhodného pole generujícího kóty. Speciálně ukažte, že pro nezávisle kótovaný bodový proces platí $k_f(r) = 1$, $\gamma_m(r) = \operatorname{var} M_o$, $E(r) = \mathbb{E} M_o$ a $V(r) = \operatorname{var} M_o$, kde M_o je typická kóta.

Úlohy ke cvičení NSTP154 – nehomogenní bodové procesy

1. Nechť Φ je bodový proces takový, že existuje funkce intenzity $\lambda(x)$ a součinová hustota druhého řádu. Uvažujme náhodnou míru

$$\Xi = \sum_{X \in \Phi} \frac{1}{\lambda(X)} \delta_X,$$

tj. se jedná o míru, které má atomy ve stejných bodech jako Φ, ale místo hmoty 1 jim přiřazuje hmotu danou převrácenou hodnotou funkce intenzity v daném bodě.

a) Míra intenzity náhodné míry Ξ je $\Lambda_\Xi(B) = \mathbb{E}\Xi(B)$. Ukažte, že $\Lambda_\Xi(B) = |B|$.

b) Faktoriální momentovou míru druhého řádu náhodné míry Ξ můžeme definovat jako

$$\alpha_\Xi^{(2)}(B_1 \times B_2) = \mathbb{E} \sum_{X,Y \in \Phi}^{\neq} \frac{\mathbf{1}_{[X \in B_1, Y \in B_2]}}{\lambda(X)\lambda(Y)}.$$

Předpokládejme, že je translačně invariantní, tj. $\alpha_\Xi^{(2)}(B_1 \times B_2) = \alpha_\Xi^{(2)}((B_1 + x) \times (B_2 + x))$ pro každé $x \in \mathbb{R}^d$. Dokažte, že potom Φ je po převážení funkcí intenzity slabě stacionární bodový proces.

2. Nechť Φ je po převážení funkcí intenzity slabě stacionární bodový proces s funkcí intenzity λ. Pomocí Campbellovy-Meckeho věty dokažte, že K-funkci lze pro skoro všechna $y \in \mathbb{R}^d$ vyjádřit jako

$$K_{\text{inhom}}(r) = \mathbb{E}_y^! \sum_{X \in \Phi} \frac{\mathbf{1}_{[\|X-y\| \leq r]}}{\lambda(X)}.$$

3. Ukažte, že každý Poissonův bodový proces s funkcí intenzity λ je po převážení funkcí intenzity slabě stacionární a platí $\mathcal{K}_{\text{inhom}}(A) = |A|$, $A \in \mathcal{B}^d$, speciálně tedy $K_{\text{inhom}}(r) = \omega_d r^d$.

4. Nechť Φ je stacionární bodový proces s intenzitou λ a párovou korelační funkcí g, $p : \mathbb{R}^d \to [0,1]$ je měřitelná funkce a $\{U(x) : x \in \mathbb{R}^d\}$ jsou nezávislé náhodné veličiny s rovnoměrným rozdělením na $(0,1)$ a nezávislé na Φ. Dokažte, že ztenčený bodový proces $\Phi_{\text{th}} = \{X \in \Phi : U(X) < p(X)\}$ je po převážení funkcí intenzity slabě stacionární.

5. Mějme funkci $\eta : (0,1)^d \to \mathbb{R}_+$ danou předpisem

$$\eta(y) = \prod_{i=1}^{d} \alpha(\theta_i) \exp\left\{ \sum_{j=1}^{d} \theta_j y_j \right\},$$

kde

$$\alpha_i(\theta_i) = \begin{cases} \frac{\theta_i}{e^{\theta_i} - 1} & \text{pro } \theta_i \neq 0, \\ 1 & \text{pro } \theta_i = 0, \end{cases} \quad i = 1, \ldots, d$$

a $\theta_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, \ldots, d$ jsou reálné konstanty. Definujme funkci $h : (0,1)^d \to (0,1)^d$ vztahem $h(x) = (h_1(x_1), \ldots, h_d(x_d))$, kde

$$h_i(v) = \begin{cases} \frac{1}{\theta_i} \log(1 + (e^{\theta_i} - 1)v) & \text{pro } \theta_i \neq 0, \\ 1 & \text{pro } \theta_i = 0, \end{cases} \quad v \in (0,1),\ i = 1, \ldots, d.$$

Ověřte, že h je regulární a prosté zobrazení a jakobián inverzního zobrazení h^{-1} je $J_{h^{-1}}(y) = \eta(y)$.

6. Ukažte, že střední hodnoty h-vážených reziduálních měr s neupravenými, inverzními a Pearsonovými inovacemi jsou nulové pro stacionární Poissonův bodový proces.