

Zápočtová písemka NSTP198 – 13. 1. 2011

1. V tovární hale, ve které je nepřetržitý provoz, pracuje pět automatických strojů. U každého stroje může dojít k poruše, přičemž výskyt poruchy nezávisí na předchozím stavu stroje ani na stavu ostatních strojů. O stroje se starají dva opraváři. Stroj, který se porouchá, je okamžitě opravován, pokud je nějaký opravář volný; pokud jsou oba opraváři zaměstnáni, stroj nepracuje a čeká na opravu. Předpokládá se, že na opravě jednoho stroje pracuje jen jeden opravář a opraváři pracují nezávisle. Dále předpokládáme, že každý stroj, který v čase t pracuje, se během intervalu $(t, t+h]$ porouchá s pravděpodobností $h + o(h)$. Stroj, který je v čase t opravován, je v intervalu $(t, t+h]$ znovu uveden do provozu s pravděpodobností $5h + o(h)$. Nechť X_t je počet strojů, které v čase t nepracují.

- Určete matici intenzit Markovova řetězce $\{X_t, t \geq 0\}$. (2 body)
- Najděte stacionární rozdělení počtu nepracujících strojů (pokud existuje). (3 body)
- Je při stacionárním rozdělení ve střední hodnotě méně než jeden nefunkční stroj? (1 bod)

2. Uvažujme Markovův řetězec s maticí intenzit

$$Q = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 2 & -4 & 2 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 3 & -6 & 3 & \ddots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix}.$$

- Určete matici pravděpodobností přechodu ve vnořeném řetězci. (1 bod)
- Rozhodněte, zda všechny stavy vnořeného řetězce jsou trvalé. (2 body)
- Zjistěte, zda existuje stacionární rozdělení vnořeného řetězce. Pokud ano, tak ho určete. (2 body)
- Zjistěte, zda existuje stacionární rozdělení řetězce s maticí intenzit Q . Pokud ano, tak ho určete. (3 body)