Zápočtová písemka NSTP198 – 21. 11. 2011

1. Nechť $\{Y_n, n \in \mathbb{N}\}$ je posloupnost nezávislých stejně rozdělených náhodných veličin s alternativním rozdělením, tj. $P(Y_n = 0) = 1 - p$, $P(Y_n = 1) = p$, kde $p \in (0, 1)$. Položme $X_n = 2Y_n + Y_{n+1}$, $n \in \mathbb{N}$.

a) Přesvědčte se, že $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tvoří homogenní Markovův řetězec. (0 bodů)

b) Určete matici pravděpodobností přechodu po n krocích. (2 body)

c) Klasifikujte stavy řetězce. (1 bod)

d) Určete stacionární rozdělení (pokud existuje). (1 bod)

2. Mějme Markovův řetězec s maticí pravděpodobností přechodu

$$\mathbb{P} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{3}{5} \\ \frac{1}{10} & \frac{7}{10} & \frac{1}{5} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Klasifikujte stavy řetězce a určete pravděpodobnosti absorpce do množiny trvalých stavů. Předpokládejme, že počáteční rozdělení řetězce je rovnoměrné (každý stav má stejnou pravděpodobnost). Spočtěte absolutní pravděpodobnosti po jednom kroku. (5 bodů)

3. Dva hráči basketbalu střílejí na koš. Domluvili se, že každý bude házet tak dlouho, dokud poprvé nezasáhne koš, pak ho střídá druhý hráč. Můžeme si tak představit, že série hodů se skládá z několika kol. V lichém kole hází hráč A, v sudém kole hází hráč B. Kolo končí ve chvíli, kdy daný hráč nevstřelí koš. Předpokládejme, že hráč A vstřelí koš s pravděpodobností $a \in (0, 1)$ a hráč B vstřelí koš s pravděpodobností $b \in (0, 1)$. Označme X_n počet hodů provedených hráčem A v průběhu n-tého kola.

a) Přesvědčte se, že $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tvoří homogenní Markovův řetězec. (0 bodů)

b) Určete matici pravděpodobností přechodu. (1 bod)

c) Najděte stacionární rozdělení (pokud existuje). (2 body)

d) Klasifikujte stavy řetězce. (2 body)