

Zápočtová písemka NSTP198 – 12. 1. 2012

1. Uvažujme Markovův řetězec s maticí intenzit

$$Q = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

- Určete matici pravděpodobností přechodu ve vnořeném diskrétním řetězci. (1 bod)
 - Najděte stacionární rozdělení ve vnořeném diskrétním řetězci. (1 bod)
 - Najděte stacionární rozdělení v řetězci s maticí intenzit Q . (1 bod)
2. Zákaznickou linku jisté firmy obsluhují čtyři operátoři. Předpokládejme, že operátor, který vyřizuje hovor v čase t , skončí s vyřizováním v časovém intervalu $(t, t + h]$ s pravděpodobností $\mu h + o(h)$, kde $\mu > 0$. Dále předpokládejme, že v časovém intervalu $(t, t + h]$ přijde hovor od zákazníka s pravděpodobností $\lambda h + o(h)$, kde $\lambda > 0$, neprijde žádný hovor s pravděpodobností $1 - \lambda h + o(h)$ a přijdou dva nebo více hovorů s pravděpodobností $o(h)$. Pokud jsou všichni operátoři obsazeni, další hovor se ztrácí. Označme X_t počet operátorů, kteří v čase $t \geq 0$ vyřizují hovor.
- Určete matici intenzit Markovova řetězce $\{X_t, t \geq 0\}$. (2 body)
 - Najděte stacionární rozdělení (pokud existuje). (3 body)

3. Uvažujme Markovův řetězec s maticí intenzit

$$Q = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 2 & -3 & 1 & 0 & 0 & \dots \\ 3 & 0 & -4 & 1 & 0 & \dots \\ 4 & 0 & 0 & -5 & 1 & \ddots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix}.$$

- Určete matici pravděpodobností přechodu ve vnořeném řetězci. (1 bod)
- Ukažte, že existuje stacionární rozdělení vnořeného řetězce, a proto jsou jeho stavy trvalé. (2 body)
- Rozhodněte, zda existuje stacionární rozdělení řetězce s maticí intenzit Q . Pokud ano, tak ho určete. (3 body)
Pomůcka: $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} = e$.