Zápočtová písemka NMSA334 – 3. 4. 2013

1. Uvažujme dvě urny, z nichž každá obsahuje 3 koule. Z celkového počtu 6 koulí jsou 3 bílé a 3 černé. V každém kroku provedeme následující operaci: v každé z uren náhodně zvolíme jednu kouli a přemístíme ji do opačné urny (výměna koulí probíhá současně). Nechť X_n udává počet bílých koulí v první urně po n operacích.

a) Přesvědčte se, že $\{X_n, n \in \mathbb{N}_0\}$ je homogenní Markovův řetězec. (0 bodů)
b) Určete matici pravděpodobností přechodu. (1 bod)
c) Klasifikujte stavy řetězce. (1 bod)
d) Spočtěte stacionární rozdělení (pokud existuje). (1 bod)
e) Předpokládejme, že na počátku (v čase $n = 0$) byly v první urně pouze bílé a v druhé urně pouze černé koule. Určete rozdělení řetězce v čase $n = 2$. (1 bod)

2. Mějme Markovův řetězec s maticí pravděpodobností přechodu

$$\boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{6} & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{4} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

a) Klasifikujte stavy řetězce. (1 bod)
b) Spočtěte stacionární rozdělení (pokud existuje). (2 body)
c) Určete matici $\boldsymbol{U}$ pravděpodobností absorpce do množiny trvalých stavů. (2 body)

3. Adéla a Blažena hrají proti sobě piškvorky. Předpokládejme, že každá hra skončí s pravděpodobností 1/2 výhrou Adély a s pravděpodobností 1/2 výhrou Blaženy. Za výhru si hráčka připisuje jeden bod. Označme X_n absolutní hodnotu rozdílu získaných bodů obou hráček po n partiích.

a) Přesvědčte se, že $\{X_n, n \in \mathbb{N}\}$ je homogenní Markovův řetězec. (0 bodů)
b) Určete matici pravděpodobností přechodu. (1 bod)
c) Klasifikujte stavy řetězce. (2 body)
d) Spočtěte stacionární rozdělení (pokud existuje). (2 body)