Zápočtová písemka NMSA334 – 3. 4. 2013

1. Uvažujme urnu, která obsahuje celkem N ($N \geq 2$) koulí dvou různých barev (černé a bílé). V každém kroku náhodně vytáhneme dvě koule. Pokud vytáhneme dvě stejné barvy, odebereme je a nahradíme dvěma koulemi opačné barvy. V případě, že vytáhneme dvě koule různých barev, vhodíme je zpět do urny. Nechť X_n udává počet bílých koulí v urně v čase n.

a) Přesvědčte se, že $\{X_n, n \in \mathbb{N}_0\}$ je homogenní Markovův řetězec. (0 bodů)

b) Určete matici pravděpodobností přechodu. (2 body)

c) Klasifikujte stavy řetězce. (1 bod)

d) Předpokládejte, že na počátku (v čase $n = 0$) je v urně jedna bílá s pravděpodobností 1/2 nebo žádná bílá s pravděpodobností 1/2. Určete rozdělení řetězce v čase $n = 1$. (1 bod)

2. Mějme Markovův řetězec s maticí pravděpodobností přechodu

$$\boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ \frac{1}{6} & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix}.$$

a) Klasifikujte stavy řetězce. (1 bod)

b) Spočtěte stacionární rozdělení (pokud existuje). (2 body)

c) Určete matici $\boldsymbol{U}$ pravděpodobností absorpce do množiny trvalých stavů. (2 body)

3. Mějme Markovův řetězec s maticí pravděpodobností přechodu

$$\boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{2}{3^2} & \frac{2}{3^3} & \cdots \\ 1 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 1 & 0 & \cdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix}.$$

Určete stacionární rozdělení (pokud existuje) a klasifikujte stavy řetězce. (5 bodů)