

Zápočtová písemka NMSA334 – 15. 5. 2013

1. Na horskou chatu spolu vyjeli tři kamarádi. Při příjezdu na chatu v čase $t = 0$ je jeden z nich nemocný. Vlastnosti nemoci jsou takové, že jsou-li spolu zdravý a nemocný jedinec, pak ten nemocný nakazí zdravého v časovém intervalu $(t, t + h]$ s pravděpodobností $\frac{1}{2}h + o(h)$. Jedinec nemocný v čase t se naopak uzdraví v časovém intervalu $(t, t + h]$ s pravděpodobností $\frac{1}{3}h + o(h)$. Uzdravování a infikování jednotlivých jedinců probíhá nezávisle (nakažený=infikovaný=nemocný). Zdravý jedinec nemůže nakazit nikoho. Nechť Markovův řetězec $\{X_t, t \geq 0\}$ udává počet nemocných kamarádů na chatě v čase t .

- a) Určete matici intenzit přechodu řetězce $\{X_t, t \geq 0\}$. (2 body)
- b) Určete matici pravděpodobností přechodu vnořeného řetězce. (1 bod)
- c) Zjistěte, zda existuje limitní rozdělení řetězce $\{X_t, t \geq 0\}$. Pokud ano, tak ho určete. (1 bod)
- d) Jaká je střední hodnota doby setrvání řetězce v počátečním stavu? (1 bod)

2. V jisté bance jsou otevřeny dvě přepážky. Do banky náhodně a nezávisle přicházejí zákazníci. V průměru přichází 20 zákazníků za hodinu. Pokud není u některé přepážky volno, zařadí se do fronty, která je společná pro obě přepážky. Přičemž zákazník, který by se musel do fronty zařadit jako třetí, odchází neobsloužen. U obou přepážek je doba obsluhy průměrně 4 minuty. Předpokládejme, že doba obsluhy má exponenciální rozdělení. Označme $\{X_t\}$ počet zákazníků, kteří jsou v čase t v bance (ve frontě a u přepážek dohromady).

- a) Určete matici intenzit Markovova řetězce $\{X_t, t \geq 0\}$. (2 body)
- b) Spočtete limitní rozdělení počtu zákazníků v bance (pokud existuje). (2 body)
- c) Spočtete střední počet zákazníků ve frontě v ustáleném provozu. (1 bod)

3. Uvažujme Markovův řetězec s maticí intenzit

$$Q = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & \ddots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix}.$$

- a) Ukažte, že vnořený řetězec má trvalé stavy. (2 body)
- b) Rozhodněte, zda existuje stacionární rozdělení řetězce s maticí intenzit Q . Pokud ano, tak ho určete. (2 body)