Zápočtová písemka NMSA409 – 20. 11. 2013

1. Nechť A a B jsou nezávislé náhodné veličiny s rovnoměrným rozdělením na $[0, 1]$. Uvažujme náhodný proces $\{X_t, t \in \mathbb{R}\}$ definovaný jako $X_t = A + B \cos t$, $t \in \mathbb{R}$. Zjistěte, zda tento proces

a) je slabě či kovariančně stacionární, (2 body)

b) je spojitý podle kvadratického středu, má derivaci podle kvadratického středu a existuje Riemannův integrál na omezeném intervalu $[a, b]$. (3 body)

2. Mějme náhodnou posloupnost $X_t = A(-1)^{tB}$, kde A a B jsou nezávislé náhodné veličiny, A má normované normální rozdělení $N(0, 1)$ a B má alternativní rozdělení s parametrem $p \in (0, 1)$, tj. $P(B = 0) = 1 - p$, $P(B = 1) = p$.

a) Zjistěte, zda jde o slabě stacionární posloupnost a určete její autokovarianční funkci. (2 body)

b) Určete spektrální distribuční funkci a spektrální hustotu (pokud existuje). (2 body)

3. Nechť $\{X_t, t \in \mathbb{R}\}$ a $\{Y_t, t \in \mathbb{R}\}$ jsou vzájemně nezávislé slabě stacionární náhodné procesy takové, že $\{X_t, t \in \mathbb{R}\}$ má spektrální hustotu $f_X(\lambda) = a\mathbf{1}\{|\lambda| \leq 1\}$ a $\{Y_t, t \in \mathbb{R}\}$ má spektrální hustotu $f_Y(\lambda) = \mathbf{1}\{|\lambda| < b\}$, přičemž $a > 0$ a $b > 0$ jsou reálné konstanty. Určete autokovarianční funkci náhodného procesu $\{Z_t, t \in \mathbb{R}\}$, kde $Z_t = X_t + Y_t$ pro každé $t \in \mathbb{R}$. (5 bodů)