11. cvičení
Transformace náhodných vektorů II.

1. Pro U_1, U_2 nezávislé s rovnoměrným rozdělením na $(0,1)$ určete rozdělení jejich součinu a podílu.

2. Nechť jsou X, Y nezávislé náhodné veličiny s rozdělením $X \sim \mathrm{R}[0,1]$ a $Y \sim \mathrm{R}[-1,1]$. Určete rozdělení náhodného vektoru $(W, Z)^\mathsf{T} = (X, XY^2)^\mathsf{T}$. Odtud určete hustotu náhodné veličiny Z.

3. Nechť jsou X, Y nezávislé náhodné veličiny s rozdělením $X \sim \mathrm{R}[0,2]$ a $Y \sim \mathrm{R}[1,2]$. Určete rozdělení veličiny $Z = (1-X)^2/Y$.

4. Nechť X a Y jsou nezávislé náhodné veličiny, s rovnoměrným rozdělením na intervalu $(-1,\ 1)$. Určete rozdělení náhodné veličiny $Z = |X| + |Y|$.

5. Nechť X a Y jsou nezávislé s Poissonovým rozdělením s parametry λ_1 a λ_2. Jaké je rozdělení X za podmínky $X + Y = n$? (Tzn. určete $\mathsf{P}(X = k | X + Y = n)$ pro všechna k, pro která je tato pravděpodobnost nenulová.)

6. Nechť má náhodný vektor $(X,\ Y)^T$ rovnoměrné rozdělení na množině $M = \big\{(x,\ y) :\ 0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq 1,\ x \leq y\big\}$. Určete $\mathsf{E}(X | X - Y)$.

7. Nechť X_1, X_2 jsou nezávislé stejně rozdělené s rozdělením $\Gamma(\lambda, n)$, kde $n \in \mathbb{N}$ a $\lambda > 0$. Určete rozdělení náhodné veličiny $Y_1 = \frac{X_1}{X_1 + X_2}$.

8. Nechť $(X,\ Y)^T$ má rovnoměrné rozdělení na $(0,\ 1)^2$. Nechť
$$\mathbf{W} = \begin{pmatrix} U \\ V \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{X+Y} \\ e^{X-Y} \end{pmatrix}.$$
Určete rozdělení náhodného vektoru $\mathbf{W}$.

9. Mějme kouli o náhodném poloměru $R \sim \mathrm{R}(0,\ 1)$. V náhodné vzdálenosti L od středu vedeme koulí řez, přičemž $L \sim \mathrm{R}(0,\ 1)$ a L a R jsou nezávislé. Nechť Z označuje poloměr řezu.
   (a) Určete rozdělení náhodné veličiny Z.
   (b) Určete střední poloměr řezu.

   Poznámka. Popsaným problémem se zabýval S. D. Wicksell (Wicksell, 1925, *Biometrika* **17**, 84–99).

Opakování z přednášky

Transformace náhodného vektoru (prostá) Uvažujme náhodný vektor $\mathbf{X} = (X_1, \ldots, X_n)^\mathsf{T}$ s nosičem rozdělení $S_\mathbf{X} \subseteq \mathbb{R}^n$ a spojitým rozdělením (má hustotu vzhledem k Lebesgueově míře). Nechť je dána transformace $\mathbf{t} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, tj. $\mathbf{t} = (t_1, \ldots, t_n)^\mathsf{T}$, kde každá t_i zobrazuje $\mathbb{R}^n$ do $\mathbb{R}$.

Zajímá nás rozdělení náhodného vektoru $\mathbf{Y} = \mathbf{t}(\mathbf{X})$. Budeme předpokládat, že transformace $\mathbf{t}$ je diferencovatelná skoro všude v $S_\mathbf{X}$, tj. existuje matice

$$\frac{\partial \mathbf{t}(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial t_1(\mathbf{x})}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial t_1(\mathbf{x})}{\partial x_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial t_n(\mathbf{x})}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial t_n(\mathbf{x})}{\partial x_n} \end{pmatrix}.$$

Determinant této matice (jakobián transformace $\mathbf{t}$) budeme značit $D_\mathbf{t}(\mathbf{x})$.

Nechť $\mathbf{X}$ má hustotu $f_\mathbf{X}(\mathbf{x})$ vzhledem k Lebesgueově míře. Nechť $\mathbf{t}$ je prosté zobrazení se spojitými prvními parciálními derivacemi na $S_\mathbf{X}$ a $D_\mathbf{t}(\mathbf{x}) \neq 0$ pro skoro všechna $x \in S_\mathbf{X}$. Nechť $\boldsymbol{\tau}$ je inverzní funkce k $\mathbf{t}$ a $D_{\boldsymbol{\tau}}(\mathbf{x})$ je jakobián $\boldsymbol{\tau}$. Pak $\mathbf{Y} = \mathbf{t}(\mathbf{X})$ má hustotu

$$f_\mathbf{Y}(\mathbf{y}) = f_\mathbf{X}(\boldsymbol{\tau}(\mathbf{y}))\, |D_{\boldsymbol{\tau}}(\mathbf{y})|\, \mathbb{I}\big\{\mathbf{y} \in \mathbf{t}(S_\mathbf{X})\big\}$$

vzhledem k Lebesgueově míře.

Transformace náhodného vektoru (neprostá) Nechť $\mathbf{X}$ má hustotu $f_\mathbf{X}(\mathbf{x})$ vzhledem k Lebesgueově míře. Nechť existují množiny $G_k \subseteq S_\mathbf{X}$, $k = 1, 2, \ldots$, takové, že $\bigcup_{k=1}^\infty G_k = S_\mathbf{X}$, $G_i \cap G_j = \emptyset$ pro $i \neq j$, $\mathbf{t}_k(\mathbf{x}) = \mathbf{t}(\mathbf{x})\mathbb{I}_{G_k}(\mathbf{x})$ je prosté se spojitými prvními parciálními derivacemi na každém G_k a $D_{\mathbf{t}_k}(\mathbf{x}) \neq 0$ pro skoro všechna $\mathbf{x} \in G_k$. Nechť $\boldsymbol{\tau}_k$ je inverzní funkce k t_k. Pak $\mathbf{Y} = \mathbf{t}(\mathbf{X})$ má hustotu

$$f_\mathbf{Y}(\mathbf{y}) = \sum_{k=1}^\infty f_\mathbf{X}(\boldsymbol{\tau}_k(\mathbf{y}))\, |D_{\boldsymbol{\tau}_k}(\mathbf{y})|\, \mathbb{I}\big\{\mathbf{y} \in \mathbf{t}_k(G_k)\big\}$$

vzhledem k Lebesgueově míře.

Časté použití Nechť $\mathbf{X} = (X_1, \ldots, X_n)'$ je náhodný vektor a zajímá nás rozdělení náhodné veličiny $T = g(\mathbf{X})$. Postupujeme následovně. Zvolíme vhodnou transformaci $\mathbf{t} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ tak, aby $t_1(\mathbf{x}) = g(\mathbf{x})$. Pomocí výše popsaných tvrzení spočteme sdruženou hustotu $\mathbf{Y} = \mathbf{t}(\mathbf{X})$. Marginální hustota Y_1 pak odpovídá hledaná hustotě náhodné veličiny T.