12. cvičení
Opakování a doplňky

1. Nechť X je náhodná veličina se spojitou rostoucí distribuční funkcí F_X. Spočítejte distribuční funkci náhodné veličiny $Y = F_X(X)$. O jaké rozdělení se jedná?

2. Hustota náhodného vektoru $(X, Y, Z)^\mathsf{T}$ je

$$f(x,y,z) = \begin{cases} cx^3y^2z & \text{pro } 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le x,\ 0 \le z \le xy, \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$

   Najděte konstantu c a hustotu podvektoru (X, Y). Rozhodněte o nezávislosti X, Y, Z.

3. Náhodná veličina T má exponenciální rozdělení s intensitou λ. Podmíněné rozdělení veličiny N za podmínky $T = t$ je Poissonovo s parametrem t, tedy

$$\mathsf{P}(N = k \,|\, T = t) = \frac{t^k}{k!}\, e^{-t}, \quad k = 0, 1, \dots$$

   Najděte rozdělení veličiny N.

4. X, Y jsou nezávislé náhodné veličiny s exponenciálním rozdělením s týmž parametrem λ.
   (a) Určete střední hodnoty $\mathsf{E}\,(X+Y)$ a $\mathsf{E}\big(X/(X+Y)\big)$.
   (b) Dokažte, že náhodné veličiny $X+Y$ a $X/(X+Y)$ jsou nezávislé.
   (c) Spočítejte $\mathsf{E}\,(X|X+Y)$.
   (d) Spočítejte $\mathsf{E}\,\min(X, Y)$.

5. Nechť má náhodná veličina X normální rozdělení $\mathsf{N}(1, 4)$.
   (a) Pomocí tabulek určete $\mathsf{P}(X < 1)$, $\mathsf{P}(X > 5)$ a $\mathsf{P}\big(|X| < 2\big)$.
   (b) Určete nejmenší u, pro které X leží v intervalu $(1-u, 1+u)$ s pravděpodobností alespoň 0,95.

6. Nechť $X_1, X_2, \dots$ jsou nezávislé náhodné veličiny s normálním rozdělením $\mathsf{N}(\mu, \sigma^2)$.
   (a) Jaké je rozdělení $\overline{X}_n$?
   (b) Jaká je pravděpodobnost, že průměr $\overline{X}_n$ bude menší než střední hodnota μ?
   (c) Nechť $\mu = 1$ a $\sigma^2 = 4$. Jak velké n je třeba zvolit, abychom měli zaručeno, že průměr $\overline{X}_n$ bude kladné číslo s pravděpodobností alespoň 0,99?

7. Nechť $X_1, \dots, X_n$ jsou nezávislé stejně rozdělené náhodné veličiny s normovaným normálním rozdělením $\mathbb{N}(0, 1)$. Označme $Z_n = \sum_{i=1}^n X_i^2$. Spočtěte střední hodnotu $\mathsf{E}\,Z_n$ a rozptyl $\mathsf{Var}\,(Z_n)$. Jak se nazývá rozdělení veličiny Z_n? (Znáte z přednášky.)
   Návod: Pro výpočet rozptylu využijte toho, že $\mathsf{E}\,X^4 = 3$ *pro* $X \sim \mathsf{N}(0, 1)$.

Normální rozdělení. Normální rozdělení $\mathsf{N}(\mu, \sigma^2)$ má hustotu

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left\{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right\}, \quad x \in \mathbb{R}, \tag{1}$$

kde $\mu \in \mathbb{R}$ a $\sigma^2 > 0$ jsou parametry. Je-li $\mu = 0$ a $\sigma^2 = 1$, tj. $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\{-x^2/2\}$, pak se toto rozdělení nazývá standardizované (normované) normální rozdělení a značí se $\mathsf{N}(0, 1)$.

- Distribuční funkce rozdělení $\mathsf{N}(0, 1)$ se značí jako Φ, tj. $\Phi(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\{-t^2/2\}\, \mathrm{d}t$. Tento určitý integrál je možné spočítat jen numericky, a proto hodnoty funkce Φ nalezneme v tabulkách. Ze symetrie platí
$$\Phi(x) + \Phi(-x) = 1, \qquad \text{pro všechna } x \in \mathbb{R}. \tag{2}$$
Pro obecné $\mathsf{N}(\mu, \sigma^2)$ se potom distribuční funkce $F(x)$ spočte jako $F(x) = \Phi\big(\frac{x-\mu}{\sigma}\big)$.
- Je-li $X \sim \mathsf{N}(\mu, \sigma^2)$, pak $\mathsf{E}\, X = \mu$ a $\mathsf{Var}\, X = \sigma^2$.
- Je-li $X \sim \mathsf{N}(\mu, \sigma^2)$ a $a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, pak $aX + b$ má normální rozdělení $\mathsf{N}(a\mu + b, a^2\sigma^2)$.
- Jsou-li X, Y nezávislé normálně rozdělené a $a, b \in \mathbb{R}$, pak $aX + bY$ má normální rozdělení (s příslušnými parametry).
- Má-li $(X, Y)'$ sdružené dvourozměrné normální rozdělení, pak má $aX + bY$ normální rozdělení (s příslušnými parametry).