## Výsledky příkladů
## Cvičení 5

1. (a) Jedná se o geometrické rozdělení s parametrem $p = 1/6$, tedy
$$\mathsf{P}[X = k] = \frac{1}{6}\left(\frac{5}{6}\right)^k, \qquad k = 0, 1, 2, \dots$$
(b) $\mathsf{P}[X \leq 6] = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^7$.
(c) $\mathsf{E}\, X = 5$, $\mathsf{Var}\,(X) = 30$.
(d) Pomocí Jensenovy nerovnosti nebo přímým výpočtem, který dává $\mathsf{E}\, \frac{1}{1+X} = \frac{\ln 6}{5}$ a $\frac{1}{1+\mathsf{E}\, X} = \frac{1}{6}$.
(e) $\mathsf{P}[Y = k] = \binom{n-1+k}{k}\left(\frac{5}{6}\right)^k\left(\frac{1}{6}\right)^n$, $k = 0, 1, 2, \dots$

2. Označme $\Phi$ distribuční funkci normovaného normálního rozdělení. Potom $\mathsf{P}[4{,}78 \leq X \leq 5{,}19] = \Phi(0{,}95) - \Phi(-1{,}1) = 0{,}181$.

3. (a) $\lambda = \frac{-\ln 0{,}7}{60} = 0{,}006$.
(b) Šikmost je 2, špičatost 6.
(c) pro $\lambda > 1$ je $\mathsf{E}\, e^X = \frac{\lambda}{\lambda - 1}$.

4. Z definice vyjádříme podmíněnou pravděpodobnost. Pak z toho, že $\mathsf{P}[X > x + y, X > y] = \mathsf{P}[X > x + y] = e^{-\lambda(x+y)}$ a $\mathsf{P}[X > y] = e^{-\lambda y}$ již plyne tvrzení.

5. $\mathsf{E}\, Y = \frac{11}{3}$, $\mathsf{Var}\,(Y) = \frac{8}{9}$.

6. Náhodná veličina $X$ je součtem tisíce nezávislých stejně rozdělených veličin s rovnoměrným rozdělením na množině $\{1, \dots, 6\}$, tedy $\mathsf{E}\, X = 1000 \cdot \frac{21}{6} = 3500$, $\mathsf{Var}\,(X) = 1000 \cdot \frac{35}{12}$. Pak z Čebyševovy nerovnosti plyne
$$\mathsf{P}[3200 \leq X \leq 3800] = \mathsf{P}\big[|X - \mathsf{E}\, X| \leq 300\big] \geq 1 - \frac{\mathsf{Var}\,(X)}{300^2} \geq 0{,}967.$$

7. Z Čebyševovy nerovnosti je daná pravděpodobnost
$$\mathsf{P}\Big[|X - \mathsf{E}\, X| \leq 2\sqrt{\mathsf{Var}\,(X)}\Big] \geq 1 - \frac{\mathsf{Var}\,(X)}{4\,\mathsf{Var}\,(X)} = \frac{3}{4}.$$

8. (a) $\mathsf{P}[X = k] = \frac{(p\lambda)^k}{k!}e^{-p\lambda}$, tedy $X$ má Poissonovo rozdělení s parametrem $p\lambda$.
(b) Pro Poissonovo rozdělení platí $\mathsf{E}\, X = p\lambda$.
(c) $\mathsf{P}[N = k | X = j] = \frac{[(1-p)\lambda]^{k-j}}{(k-j)!}e^{-(1-p)\lambda}$.