NMAG204 GEOMETRIE
LS 2019/20

JAN RATAJ

1. Úvod

1.1. **Eukleidovský prostor.**

Definice 1.1. n-rozměrný eukleidovský prostor je čtveřice $(E_n, V_n, \cdot, +)$, kde E_n je neprázdná množina (množina bodů prostoru), V_n je vektorový prostor dimenze n nad $\mathbb{R}$ se skalárním součinem $\cdot$ a $+$ je zobrazení $E_n \times V_n$ do E_n s vlastnostmi

(1) $a + (u + v) = (a + u) + v,$, $a \in E_n$, $u, v \in V_n$,
(2) $a + o = a$, $a \in E_n$,
(3) pro každou dvojici bodů $a, b \in E_n$ existuje právě jeden vektor $u \in V_n$ takový, že $a + u = b$. V tom případě značíme $u = b - a$.

Budeme pracovat se standardním modelem $E_n = V_n = \mathbb{R}^n$, s eukleidovským skalárním součinem

$$u \cdot v = \sum_{i=1}^{n} u^i v^i$$

a s indukovanou normou $\|u\| = \sqrt{u \cdot u}$, která určuje vzdálenost bodů v eukleidovském prostoru

$$d(a, b) = \|b - a\|.$$

Shodnost.

Definice 1.2. Zobrazení $S : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ je *shodnost* (*izometrie*), jestliže

$$\|S(y) - S(x)\| = \|y - x\|, \quad x, y \in \mathbb{R}^n.$$

Věta 1.1. *Zobrazení $S : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ je shodnost právě tehdy, když*

(1) *S je afinní (tzn. $S(x) = Ax + b$, kde A je matice typu $n \times n$ a $b \in \mathbb{R}^n$,*
(2) *A je unitární ($A^T A = I$).*

Poznámky k důkazu. Je snadné ověřit, že zobrazení s vlastnostmi (1) a (2) je shodností. Obráceně, je-li S shodnost, lze snadno ukázat, že zobrazuje přímky na přímky a zachovává dělící poměr na přímkách. Z toho už pak snadno lze vyvodit, že zobrazení $S_0(x) := S(x) - S(o)$ je lineární, a zbývá dokázat jeho ortogonalitu. Větu s důkazem lze nalézt v textu k přednášce Lineární algebra a geometrie II kolegů L. Barto a J. Tůmy, viz
`http://msekce.karlin.mff.cuni.cz/~barto/linalg1213/skripta_la3.pdf`. □

Shodnost S je *přímá* (*nepřímá*), jestliže $\det A = 1$ ($\det A = -1$).

1.2. **Vektorový součin v $\mathbb{R}^3$.** Buď $\{e_1, \dots, e_3\}$ kanonická báze $\mathbb{R}^3$ (tedy $(e_i)^j = \delta_{ij}$). *Orientovaný objem* vektorů $u_1, \dots, u_3 \in \mathbb{R}_3$ je číslo

$$\det(u_1, \dots, u_3) = \det(e_i \cdot u_j)_{i,j=1}^3.$$

Orientovaný objem je lineární v každé složce, antisymetrický a platí

$$|\det(u_1, \dots, u_3)| = \lambda^3\Big(\Big\{ \sum_1^3 t_i u_i : \ 0 \le t_i \le 1 \Big\}\Big), \quad u_1, u_2, u_3 \in \mathbb{R}^3.$$

Definice 1.3. *Vektorový součin* $u \times v \in \mathbb{R}^3$ vektorů $u, v \in \mathbb{R}^3$ je definován vztahem

$$(u \times v) \cdot w = \det(u, v, w), \quad w \in \mathbb{R}^3.$$

Věta 1.2 (Vlastnosti vektorového součinu)**.** *Pro libovolné dva vektory $u, v \in \mathbb{R}^3$ platí*

(1) *zobrazení $(u, v) \mapsto u \times v$ je bilineární,*
(2) *$u \times v = o \iff u, v$ jsou lineárně závislé,*
(3) *$(u \times v) \cdot u = (u \times v) \cdot v = 0$,*
(4) *$\|u \times v\| = \lambda^2(\{su + tv : 0 \le s, t \le 1\})$.*

Cvičení:

(1) Pro $u, v, x, y \in \mathbb{R}^3$ je

$$(u \times v) \cdot (x \times y) = \begin{vmatrix} u \cdot x & v \cdot x \\ u \cdot y & v \cdot y \end{vmatrix},$$

tedy speciálně

$$\|u \times v\| = \sqrt{\begin{vmatrix} u \cdot u & u \cdot v \\ u \cdot v & v \cdot v \end{vmatrix}}.$$

(2) Pro $u = (u^1, u^2, u^3)^T, v = (v^1, v^2, v^3)^T \in \mathbb{R}^3$ je

$$u \times v = \left(\begin{vmatrix} u^2 & v^2 \\ u^3 & v^3 \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} u^1 & v^1 \\ u^3 & v^3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} u^1 & v^1 \\ u^2 & v^2 \end{vmatrix} \right)^T.$$

1.3. **Diferenciál zobrazení.** Buď F zobrazení z otevřené množiny $G \subseteq \mathbb{R}^m$ do $\mathbb{R}^n$. Řekneme, že F je diferencovatelné, je-li třídy $\mathcal{C}^\infty$ na G, tj. má-li spojité parciální derivace všech řádů na G. *Diferenciál* F v bodě $x \in G$ je lineární zobrazení

$$dF_x : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$$

určené podmínkou

$$\|F(x + \xi) - F(x) - dF_x(\xi)\| = o(\|\xi\|), \quad \|\xi\| \to 0.$$

Hodnota $dF_x(\xi)$ se též nazývá derivací ve směru ξ a speciálně $dF_x(e_i) = \frac{\partial F}{\partial x^i}(x)$ je parciální derivace F podle x^i. Lineární zobrazení dF_x je určeno svou maticí

$$\left(\frac{\partial F^i}{\partial x^j} \right)_{i=1,j=1}^{m,n}.$$

Je-li $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$, značíme $F'(t) = dF_t(1)$.

Diferenciál druhého řádu d^2F chápeme jako (obyčejný) diferenciál zobrazení

$$dF : G \to \mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n),$$

tedy $d^2F_x = d(dF)_x$ je lineární zobrazení z $\mathbb{R}^m$ do $\mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$, neboli (ekvivalentně) bilineární zobrazení z $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m$ do $\mathbb{R}^n$. Toto zobrazení je symetrické (záměnnost smíšených derivací) a speciálně platí $d^2F_x(e_i, e_j) = \frac{\partial^2 F}{\partial x^i \partial x^j}(x)$.

Věta 1.3 (Diferenciál složeného zobrazení)**.** *Jsou-li $G : U \to \mathbb{R}^n$ a $F : V \to U$ diferencovatelné, $U \subseteq \mathbb{R}^m$, $V \subseteq \mathbb{R}^k$ otevřené, pak pro $x \in V$ platí*

$$d(G \circ F)_x = dG_{F(x)} \circ dF_x.$$

Jsou-li F, G dvakrát diferencovatelné, pak

$$d^2(G \circ F)_x(u, v) = d^2G_{F(x)}(dF_x(u), dF_x(v)) + dG_{F(x)}(d^2F_x(u, v)).$$

Cvičení:

(1) Pro afinní zobrazení $S : x \mapsto Ax + b$ je $dF_x = A$ pro všechna x.
(2) $F : (x, y) \mapsto x \cdot y \Longrightarrow dF_{(x,y)}(\xi, \eta) = x \cdot \eta + \xi \cdot y$
(3) $F(x) = \|x\| \Longrightarrow dF_x(\xi) = \frac{x \cdot \xi}{\|x\|}$
(4) $F : (x, y) \mapsto x \times y \Longrightarrow dF_{(x,y)}(\xi, \eta) = x \times \eta + \xi \times y$
(5) $B : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ bilineární forma, $Q(x) = B(x, x)$ příslušná kvadratická forma, pak $dQ_x(\xi) = B(x, \xi) + B(\xi, x)$.

2. Křivky

2.1. **Základní pojmy.**

Definice 2.1. Buď $I \subseteq \mathbb{R}$ interval. Diferencovatelné zobrazení (třídy C^∞) $c : I \to \mathbb{R}^n$ se nazývá *parametrizovaná křivka* v $\mathbb{R}^n$. Množina $< c >:= c(I) \subseteq \mathbb{R}^n$ se nazývá *obraz křivky.*

Pozn.: Je-li I uzavřený nebo polouzavřený interval, rozumíme diferencovatelným zobrazením na I restrikci na I diferencovatelného zobrazení definovaného na nějakém otevřeném intervalu obsahujícím I.
Příklad: $c(t) = (t, t)^T$ je parametrizace přímky, $c(t) = (\cos t, \sin t)^T$ parametrizace jednotkové kružnice v $\mathbb{R}^2$ ($I = \mathbb{R}$).
Pozn.: Obraz křivky nemusí mít tečnu v každém svém bodě, viz např. $c(t) = (t^3, t^2)^T$, $t \in \mathbb{R}$.

Definice 2.2. Parametrizovaná křivka $c : I \to \mathbb{R}^n$ je *regulární*, jestliže $c'(t) \neq 0$ pro každé $t \in I$. Vektor

$$\mathbf{t}(t) := \frac{c'(t)}{\|c'(t)\|}$$

nazýváme *(jednotkovým) tečným vektorem* křivky v bodě t.

Pozn.: Zobrazení c nemusí být prosté, bod $x \in c(I)$ obrazu křivky tedy nemusí mít jednoznačně určenou tečnu (př. - $c(t) = (t^3 - 4t, t^2 - 4)^T$). Je-li c prosté, říkáme, že parametrizovaná křivka je jednoduchá.
Příklad: Zobrazení $c(t) = (t, t)^T$ ($t > 0$) a $\tilde{c}(t) = (e^t, e^t)^T$ ($t \in \mathbb{R}$) mají stejný obraz, tedy ‘parametrizují tutéž křivku’.

Definice 2.3. Je-li $c : I \to \mathbb{R}^n$ regulární parametrizovaná křivka a $\phi : \tilde{I} \to I$ difeomorfismus intervalu $\tilde{I}$ na I, je $\tilde{c} = c \circ \phi : \tilde{I} \to \mathbb{R}^n$ regulární parametrizovaná křivka se stejným obrazem jako c. Difeomorfismus ϕ pak nazýváme *změnou parametru* (reparametrizací) křivky c. Je-li navíc $\phi' > 0$ na $\tilde{I}$, nazveme ϕ *změnou parametru (reparametrizací) zachovávající orientaci.*

Definice 2.4. Na množině všech regulárních parametrizovaných křivek v $\mathbb{R}^n$ definujeme ekvivalenci $\sim$ takto: $c \sim \tilde{c}$, jestliže $\tilde{c}$ je reparametrizací c. *Křivkou* v $\mathbb{R}^n$ pak rozumíme třídu ekvivalence $\sim$. Podobně definujeme ekvivalenci $\sim'$: $c \sim' \tilde{c}$, jestliže $\tilde{c}$ je reparametrizací c se zachováním orientace. Orientovanou křivkou v $\mathbb{R}^n$ rozumíme třídu ekvivalence $\sim'$.

Věta 2.1 (Implicitně zadaná křivka). *Buď $G \subseteq \mathbb{R}^n$ otevřená a $F : G \to \mathbb{R}^{n-1}$ diferencovatelné. Označme $\Gamma = \{x \in G : F(x) = 0\}$ a buď $x_0 \in \Gamma$ takový, že zobrazení dF_{x_0} je na $\mathbb{R}^{n-1}$. Pak existuje okolí U bodu x_0 v $\mathbb{R}^n$, otevřený interval $I \subseteq \mathbb{R}$ a regulární parametrizovaná křivka $c : I \to \mathbb{R}^n$ taková, že $c(I) = \Gamma \cap U$.*

Důkaz. Protože dF_{x_0} je na, je po eventuálním přečíslování proměnných determinant matice $\left(\frac{\partial F^i}{\partial x^j}(x_0)\right)_{i,j=1}^{n-1}$ různý od nuly. Podle věty o implicitních funkcích tedy existuje otevřený interval I obsahující x_0^n, okolí V bodu $(x_0^1, \dots, x_0^{n-1})$ a diferencovatelné zobrazení $g : I \to V$ takové, že $g(x_0^n) = (x_0^1, \dots, x_0^{n-1})$ a $F(g(x_n), x_n) = 0$ na I. Zobrazení $c : x_n \mapsto (g(x_n), x_n)$ je pak hledanou regulární parametrizovanou křivkou. $\square$

2.2. **Délka křivky.**

Definice 2.5. *Délka parametrizované křivky $c : I \to \mathbb{R}^n$ je definována jako*

$$L(c) = \sup \left\{ \sum_{i=1}^{m} \|c(t_i) - c(t_{i-1})\| : m \in \mathbb{N}, t_0 < t_1 < \dots < t_m \in I \right\}.$$

Věta 2.2. *Pro parametrizovanou křivku c platí*

$$L(c) = \int_I \|c'(t)\| \, dt.$$

Důkaz. Přednáška Matematická analýza. $\square$

Definice 2.6. Křivka $c : I \to \mathbb{R}^n$ je *parametrizována obloukem*, jestliže $\|c'(s)\| = 1$ pro všechna $s \in I$.

Pozn.: V geometrii se obvykle parametr oblouku značí symbolem s. Někdy se též používá značení $\frac{dc}{ds}(\cdot) =: c'(\cdot)$ pro derivaci podle parametru oblouku, kdežto $\frac{dc}{dt}(\cdot) =: \dot{c}(\cdot)$ pro derivaci podle obecného parametru.

Věta 2.3. *Ke každé regulární parametrizované křivce $c : I \to \mathbb{R}^n$ existuje změna parametru $\phi : \tilde{I} \to I$ zachovávající orientaci a taková, že $\tilde{c} = c \circ \phi$ je parametrizace obloukem.*

Důkaz. Zvolme $t_0 \in I$ a položme

$$\ell(t) = \int_{t_0}^{t} \|c'(\tau)\| d\tau, \quad t \in I$$

(délka křivky $c \mid (t_0, t)$) a označme $\tilde{I} = \ell(I)$ obraz intervalu I ($\tilde{I}$ je opět interval). Funkce $\ell : I \to \tilde{I}$ je rostoucí a $\ell'(t) = \|c'(t)\|$, $t \in I$. Položme $\phi = \ell^{-1}$, pak $\phi'(s) = \|c'(\phi(s))\|^{-1}$, a tedy parametrizace $\tilde{c} = c \circ \phi$ splňuje $\|\tilde{c}'(s)\| = \|c'(\phi(s))\phi'(s)\| = 1$. $\square$

Příklad: Regulární parametrizovaná křivka $c(t) = (r \cos t, r \sin t)^T$, $t \in (0, 2\pi)$ má parametrizaci obloukem $\tilde{c}(s) = (r \cos \frac{s}{r}, r \sin \frac{s}{r})^T$, $s \in (0, 2\pi r)$.

2.3. Křivost.

Definice 2.7. Buď $c : I \to \mathbb{R}^n$ regulární parametrizovaná křivka. Její *křivost* v bodě $t \in I$ je definována vztahem

$$\kappa(t) = \frac{\|\mathbf{t}'(t)\|}{\|c'(t)\|}, \quad t \in I.$$

Body s nulovou křivostí nazýváme *inflexními body* křivky.

Pozn.: Je-li ϕ změna parametru, pak tečný vektor reparametrizované křivky zřejmě splňuje $\tilde{\mathbf{t}}(s) = \pm\mathbf{t}(\phi(s))$, a tedy

$$\tilde{\kappa}(s) = \frac{\|\tilde{\mathbf{t}}'(s)\|}{\|\tilde{c}'(s)\|} = \frac{\|\mathbf{t}'(\phi(s))\phi'(s)\|}{\|c'(\phi(s))\phi'(s)\|} = \kappa(\phi(s)).$$

Křivost křivky v bodě je tedy invariantní vzhledem k reparametrizaci.

Věta 2.4. *Pro regulární parametrizovanou křivku $c : I \to \mathbb{R}^3$ platí*

$$\kappa(t) = \frac{\|c'(t) \times c''(t)\|}{\|c'(t)\|^3}, \quad t \in I.$$

Důkaz. Protože $\mathbf{t} = c'/\|c'\|$, platí

$$\mathbf{t}' = \left(\frac{c'}{\|c'\|}\right)' = \frac{\|c'\|^2 c'' - (c' \cdot c'')c'}{\|c'\|^3}.$$

Dále platí

$$\begin{aligned} \big\| \|c'\|^2 c'' - (c' \cdot c'')c' \big\|^2 &= \|c'\|^4 \|c''\|^2 - \|c'\|^2 (c' \cdot c'')^2 \\ &= \|c'\|^2 \det \begin{pmatrix} c' \cdot c' & c' \cdot c'' \\ c' \cdot c'' & c'' \cdot c'' \end{pmatrix} \\ &= \|c'\|^2 \|c' \times c''\|^2, \end{aligned}$$

kde jsme využili vzorce pro normu vektorového součinu z kapitoly 1.2. Dokazovaný vztah pak plyne z definice $\kappa = \|\mathbf{t}'\|/\|c'\|$. □

2.4. Frenetův repér křivky v $\mathbb{R}^3$.

Definice 2.8. Buď $c : I \to \mathbb{R}^3$ regulární parametrizovaná křivka. V neinflexním bodě $t \in I$ definujeme:

$$\begin{aligned} (\mathbf{t}(t) &= c'(t)/\|c'(t)\| \quad \text{tečný vektor}) \\ \mathbf{n}(t) &= \mathbf{t}'(t)/\|\mathbf{t}'(t)\| \quad \text{normálový vektor} \\ \mathbf{b}(t) &= \mathbf{t}(t) \times \mathbf{n}(t) \quad \text{binormálový vektor} \\ \tau(t) &= \mathbf{n}'(t) \cdot \mathbf{b}(t)/\|c'(t)\| \quad \text{torze} \\ & c(t) + \mathrm{Lin}\{\mathbf{t}(t), \mathbf{n}(t)\} \quad \text{oskulační rovina} \\ & c(t) + \mathrm{Lin}\{\mathbf{t}(t), \mathbf{b}(t)\} \quad \text{rektifikační rovina} \\ & c(t) + \mathrm{Lin}\{\mathbf{n}(t), \mathbf{b}(t)\} \quad \text{normálová rovina} \end{aligned}$$

Věta 2.5 (Frenetovy rovnosti)**.** *Pro regulární parametrizovanou křivku $c : I \to \mathbb{R}^3$ a každý její neinflexní bod platí:*

(i) $E(t) := \{\mathbf{t}(t), \mathbf{n}(t), \mathbf{b}(t)\}$ *je kladně orientovaná ortonormální báze* $\mathbb{R}^3$.

(ii) *$\mathbf{t}'(t) = \|c'(t)\|\kappa(t)\mathbf{n}(t)$, $\mathbf{n}'(t) = \|c'(t)\|(-\kappa(t)\mathbf{t}(t) + \tau(t)\mathbf{b}(t))$ a $\mathbf{b}'(t) = -\|c'(t)\|\tau(t)\mathbf{n}(t)$, v maticovém zápisu*

$$\begin{pmatrix} \mathbf{t}' \\ \mathbf{n}' \\ \mathbf{b}' \end{pmatrix} = \|c'\| \begin{pmatrix} 0 & \kappa & 0 \\ -\kappa & 0 & \tau \\ 0 & -\tau & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{t} \\ \mathbf{n} \\ \mathbf{b} \end{pmatrix}.$$

Důkaz. (i). Zřejmě $\|\mathbf{t}(t)\| = 1$. Dále derivováním vztahu $\mathbf{t}(t) \cdot \mathbf{t}(t) = 1$ dostaneme $2\mathbf{t}(t) \cdot \mathbf{t}'(t) = 0$, tedy $\mathbf{n}(t) \perp \mathbf{t}(t)$ a z definice též $\|\mathbf{n}(t)\| = 1$. Z vlastností vektorového součinu pak plyne, že $\{\mathbf{t}(t), \mathbf{n}(t), \mathbf{t}(t) \times \mathbf{n}(t)\}$ je kladně orientovaná ortonormální báze.

(ii). První vztah plyne přímo z definic $\mathbf{n}(t)$ a $\kappa(t)$. Vyjádřeme dále vektor $\mathbf{n}'$ v souřadnicích vůči bázi $\{\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{b}\}$:

$$\mathbf{n}' = (\mathbf{n}' \cdot \mathbf{t})\mathbf{t} + (\mathbf{n}' \cdot \mathbf{n})\mathbf{n} + (\mathbf{n}' \cdot \mathbf{b})\mathbf{b}.$$

Derivováním vztahu $\mathbf{t} \cdot \mathbf{n} = 0$ dostaneme $\mathbf{n}' \cdot \mathbf{t} = -\mathbf{t}' \cdot \mathbf{n}$, což je rovno $-\|c'\|\kappa$ dle první rovnosti. Dále opět z $\mathbf{n} \cdot \mathbf{n} = 1$ plyne $\mathbf{n}' \cdot \mathbf{n} = 0$. Konečně $\mathbf{n}' \cdot \mathbf{b} = \|c'\|\tau$ z definice torze, čímž dostáváme druhou rovnost. Využitím obou již dokázaných vztahů dalé dostaneme pro $\mathbf{b} = \mathbf{t} \times \mathbf{n}$

$$\begin{aligned} \mathbf{b}' &= \mathbf{t}' \times \mathbf{n} + \mathbf{t} \times \mathbf{n}' \\ &= \|c'\| \left(\kappa\mathbf{n} \times \mathbf{n} + \mathbf{t} \times (-\kappa\mathbf{t} + \tau\mathbf{b})\right) \\ &= \|c'\|\tau(\mathbf{t} \times \mathbf{b}) = -\|c'\|\tau\mathbf{n} \end{aligned}$$

(rovnost $\mathbf{t} \times \mathbf{b} = -\mathbf{n}$ se snadno ověří z definice vektorového součinu), což dává třetí Frenetovu rovnost. □

Poznámka 2.6. Z definice je zřejmé, že je-li $c : I \to \mathbb{R}^3$ regulární parametrizovaná křivka a $\phi : J \to I$ změna parametru zachovávající orientaci, pak tečna, hlavní normála a binormála reparametrizované křivky $\tilde{c} = c \circ \phi$ splňují v neinflexním bodě $s \in J$

$$\tilde{\mathbf{t}}(s) = \mathbf{t}(\phi(s)),\ \tilde{\mathbf{n}}(s) = \mathbf{n}(\phi(s)),\ \tilde{\mathbf{b}}(s) = \mathbf{b}(\phi(s)),$$

tedy vektory Frenetova repéru nezávisí na parametrizaci křivky. Derivováním pak dostaneme

$$\tilde{\mathbf{t}}'(s) = \mathbf{t}'(\phi(s))\phi'(s),\ \tilde{\mathbf{n}}'(s) = \mathbf{n}'(\phi(s))\phi'(s),\ \tilde{\mathbf{b}}'(s) = \mathbf{b}'(\phi(s))\phi'(s),$$

a protože také $\tilde{c}'(s) = c'(\phi(s))\phi'(s)$ a $\phi'(s) > 0$ pro změnu parametru zachovávající orientaci, dostaneme

$$\tilde{\kappa}(s) = \kappa(\phi(s)) \text{ a } \tilde{\tau}(s) = \tau(\phi(s)),$$

tedy ani křivost a torze nezávisejí na parametrizaci křivky zachovávající orientaci. Není těžké ověřit, že při změně orientace křivky vektory $\mathbf{t}$ a $\mathbf{b}$ mění znaménko, zatímco vektor $\mathbf{n}$, křivost κ a torze τ se nemění.

Věta 2.7. *Pro libovolnou regulární parametrizovanou křivku $c : I \to \mathbb{R}^3$ a neinflexní bod $t \in I$ platí*

$$\mathbf{b}(t) = \frac{c'(t) \times c''(t)}{\|c'(t) \times c''(t)\|}$$

a

$$\tau(t) = \frac{\det(c'(t), c''(t), c'''(t))}{\|c'(t) \times c''(t)\|^2}.$$

Důkaz. První rovnost plyne z toho, že vektory c', c'' určují stejný podprostor jako $\mathbf{t}, \mathbf{n}$ a báze $\{c', c''\}$ a $\{\mathbf{t}, \mathbf{n}\}$ jsou shodně orientovány. Pro ověření druhé rovnosti vyjádřeme

$$\mathbf{n} = \frac{\mathbf{t}'}{\|\mathbf{t}'\|} = \left(\frac{c'}{\|c'\|}\right)' \frac{1}{\|c'\|\kappa} = \frac{c''\|c'\|^2 - c'(c' \cdot c'')}{\|c'\|^3} \frac{\|c'\|^2}{\|c' \times c''\|}$$

(použili jsme definici křivosti a vzorec z Věty 2.4). Derivováním uvedené rovnosti dostaneme vztah

$$\mathbf{n}' = \alpha c' + \beta c'' + \frac{\|c'\|}{\|c' \times c''\|} c'''$$

pro nějaké (skalární) funkce α, β. Z definice torze a vlastností vektorového součinu pak dostaneme

$$\tau = \frac{\mathbf{n}' \cdot \mathbf{b}}{\|c'\|} = \frac{1}{\|c'\|} \frac{\|c'\|}{\|c' \times c''\|} c''' \cdot \frac{c' \times c''}{\|c' \times c''\|} = \frac{\det(c', c'', c''')}{\|c' \times c''\|^2}.$$

□

Věta 2.8. *Pro regulární parametrizovanou křivku $c : I \to \mathbb{R}^3$ bez inflexních bodů platí*

$$\tau(t) = 0, t \in I \iff \textit{křivka leží v rovině.}$$

Důkaz. Je snadné ukázat, že rovinná křivka má nulovou torzi. Předpokládejme tedy naopak, že $\tau = 0$. Z Frenetových vzorců pak $\mathbf{b}(t) = \mathbf{b}$ je konstantní na I. Zvolme $t_0 \in I$ a položme

$$g(t) = (c(t) - c(t_0)) \cdot \mathbf{b}, \quad t \in I.$$

Platí

$$g'(t) = c'(t) \cdot \mathbf{b} = \|c'(t)\| \, \mathbf{t}(t) \cdot \mathbf{b} = 0,$$

tedy funkce g je konstatntní na I. Protože však $g(t_0) = 0$, je $g = 0$ a křivka leží v rovině $\{x : (x - c(t_0)) \cdot \mathbf{b} = 0\}$. □

Pozn.: Je-li $c : I \to \mathbb{R}^3$ parametrizace obloukem a $S : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ shodnost, pak $\bar{c} := S \circ c$ je rovněž parametrizace obloukem a pro tuto křivku platí:

$$\bar{c} = S_0 \circ c, \quad \bar{\mathbf{t}} = S_0 \circ \mathbf{t}, \quad \bar{\mathbf{n}} = S_0 \circ \mathbf{n}, \quad \bar{\mathbf{b}} = \pm S_0 \circ \mathbf{b},$$

kde S_0 je lineární složka S a $\pm$ je znaménko $\det S_0$. Z těchto vztahů snadno plyne: $\bar{\kappa} = \kappa$, $\bar{\tau} = \pm\tau$. Následující věta říká, že tento vztah lze i obrátit:

Věta 2.9. *Buďte $c, \bar{c} : I \to \mathbb{R}^3$ dvě křivky parametrizované obloukem bez inflexních bodů a takové, že jejich funkce křivosti a torze splývají, tedy $\bar{\kappa} = \kappa$ a $\bar{\tau} = \tau$ na I. Pak existuje shodnost $S : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ taková, že $\bar{c} = S \circ c$.*

Důkaz. Zvolme $s_0 \in I$. Existuje právě jedna shodnost $S : x \mapsto Ax + x_0$ na $\mathbb{R}^3$ splňující

$$A\mathbf{t}(s_0) = \bar{\mathbf{t}}(s_0), A\mathbf{n}(s_0) = \bar{\mathbf{n}}(s_0), A\mathbf{b}(s_0) = \bar{\mathbf{b}}(s_0), Ac(s_0) + x_0 = \bar{c}(s_0),$$

kde $\{\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{b}\}$ je Frenetův repér křivky c a $\{\bar{\mathbf{t}}, \bar{\mathbf{n}}, \bar{\mathbf{b}}\}$ Frenetův repér křivky $\bar{c}$. (Protože oba Frenetovy repéry jsou kladně orientovány, je S přímá shodnost, neboli $\det A = 1$).

Obě křivky jsou parametrizovány obloukem, proto Frenetovy rovnice mají tvar

$$\begin{pmatrix} \mathbf{t}' \\ \mathbf{n}' \\ \mathbf{b}' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \kappa & 0 \\ -\kappa & 0 & \tau \\ 0 & -\tau & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{t} \\ \mathbf{n} \\ \mathbf{b} \end{pmatrix}$$

a

$$\begin{pmatrix} \bar{\mathbf{t}}' \\ \bar{\mathbf{n}}' \\ \bar{\mathbf{b}}' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \kappa & 0 \\ -\kappa & 0 & \tau \\ 0 & -\tau & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{\mathbf{t}} \\ \bar{\mathbf{n}} \\ \bar{\mathbf{b}} \end{pmatrix}.$$

Aplikujeme-li na první z uvedených soustav rovnic lineární transformaci A, dostaneme

$$\begin{pmatrix} A\mathbf{t}' \\ A\mathbf{n}' \\ A\mathbf{b}' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \kappa & 0 \\ -\kappa & 0 & \tau \\ 0 & -\tau & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A\mathbf{t} \\ A\mathbf{n} \\ A\mathbf{b} \end{pmatrix}.$$

Z posledních dvou soustav rovnic je zřejmé, že trojice vektorových funkcí $(\bar{\mathbf{t}}, \bar{\mathbf{n}}, \bar{\mathbf{b}})$ a $(A\mathbf{t}, A\mathbf{n}, A\mathbf{b})$ vyhovují stejné soustavě lineárních diferenciálních rovnic na intervalu I, a navíc se vzhledem k volbě A shodují v bodě $s_0 \in I$. Podle věty o jednoznačnosti řešení soustav lineárních diferenciálních rovnic tedy musí platit

$$\bar{\mathbf{t}} = A\mathbf{t}, \ \bar{\mathbf{n}} = A\mathbf{n} \ \text{ a } \bar{\mathbf{b}} = A\mathbf{b} \text{ na } I.$$

Speciálně máme $\bar{c}' = Ac'$, tudíž

$$S(c(s)) - S(c(s_0)) = \int_{s_0}^{s} Ac'(t))dt = \int_{s_0}^{s} \bar{c}'(t)dt = \bar{c}(s) - \bar{c}(s_0),$$

z čehož plyne $S(c(s)) = \bar{c}(s)$, $s \in I$. □

Věta 2.10. *Buďte $\kappa, \tau : I \to \mathbb{R}$ dvě diferencovatelné funkce na intervalu I, a nechť navíc $\kappa > 0$ na I. Pak existuje křivka $c : I \to \mathbb{R}^3$ parametrizovaná obloukem a taková, že její křivost je κ a torze τ.*

Důkaz. Frenetovy rovnice (viz důkaz Věty 2.9) udávají soustavu linerních diferenciálních rovnic pro trojici vektorových funkcí $(\mathbf{t}(s), \mathbf{n}(s), \mathbf{b}(s))$, $s \in I$. (Vyjádříme-li si vektory po souřadnicích, dostaneme soustavu devíti rovnic pro devět reálných funkcí; matici soustavy je pak třeba chápat tak, že symboly κ a τ reprezentují matice κI_3, τI_3, kde I_3 je jednotková matice v $\mathbb{R}^3$.) Předepíšeme-li počáteční podmínky ve vybraném bodě $s_0 \in I$ například jako

$$\mathbf{t}(s_0) = e_1, \ \mathbf{n}(s_0) = e_2, \ \mathbf{b}(s_0) = e_3$$

(s vektory kanonické báze e_1, e_2, e_3), z teorie lineárních diferenciálních rovnic víme, že soustava má řešení na intervalu I. Ukážeme nejprve, že vektory $\mathbf{t}(s), \mathbf{n}(s), \mathbf{b}(s)$ tvoří ortonormální bázi $\mathbb{R}^3$ pro každé $s \in I$. Šestice reálných funkcí

$$(h_1, h_2, h_3, h_4, h_5, h_6) = (\mathbf{t}\cdot\mathbf{t}, \mathbf{n}\cdot\mathbf{n}, \mathbf{b}\cdot\mathbf{b}, \mathbf{t}\cdot\mathbf{n}, \mathbf{t}\cdot\mathbf{b}, \mathbf{n}\cdot\mathbf{b})$$

splňuje podle Frenetových rovnic diferenciální rovnice

$$\begin{aligned} h_1' &= 2\kappa h_4, \\ h_2' &= -2\kappa h_4 + 2\tau h_6, \\ h_3' &= -2\tau h_6, \\ h_4' &= -\kappa h_1 + \kappa h_2 + \tau h_5, \\ h_5' &= -\tau h_4 + \kappa h_6, \\ h_6' &= -\tau h_2 + \tau h_3 - \kappa h_5. \end{aligned}$$

Konstantní šestice funkcí $(1, 1, 1, 0, 0, 0)$ vyhovuje této soustavě a splňuje počáteční podmínku v bodě s_0. Z věty o jednoznačnosti řešení soustav lineárních diferenciálních rovnic je to jediné řešení, a tedy vektory $\mathbf{t}(s), \mathbf{n}(s), \mathbf{b}(s)$ tvoří ortonormální bázi $\mathbb{R}^3$ pro každé $s \in I$.

Položme dále

$$c(s_0) := o, \quad c(s) := \int_{s_0}^{s} \mathbf{t}(t)\, dt, \quad s \in I.$$

Zřejmě platí $c'(s) = \mathbf{t}(s)$, c je tedy křivka parametrizovaná obloukem a $\mathbf{t}$ je její tečný vektor. Z první Frenetovy rovnice máme $\|\mathbf{t}'\| = \kappa\|n\| = \kappa$, tedy κ je křivostí křivky c. Rovněž z první Frenetovy rovnice pak plyne $\mathbf{n} = \mathbf{t}'/\kappa$, tedy $\mathbf{n}$ je vektor hlavní normály křivky c. Vektor $\mathbf{b}$ pak nutně musí být binormálovým vektorem a τ je torze křivky c, z druhé (nebo třetí) Frenetovy rovnice. □

2.5. **Křivky v rovině.** Na parametrizovanou křivku $c : I \to \mathbb{R}^2$ můžeme nahlížet jako na křivku v prostoru, doplníme-li třetí souřadnici nulou. V neinflexních bodech lze definovat vektory tečny a (hlavní) normály jako v Definici 2.8, vektor binormály bude identicky roven (až na znaménko) třetímu vektoru kanonické báze e_3. Báze $\{\mathbf{t}(t), \mathbf{n}(t)\}$ může být kladně nebo záporně orientována vůči kanonické bázi.

Definice 2.9. *Pro regulární parametrizovanou křivku $c : I \to \mathbb{R}^2$ definujeme znaménkovou křivost v bodě t vztahem*

$$\kappa_z(t) := \sigma(t)\kappa(t), \quad t \in I,$$

kde $\sigma(t) := \operatorname{sgn} \det(c'(t), c''(t))$ (klademe $\operatorname{sgn} 0 = 0$). Dále definujeme jednotkový vektor $\mathbf{n}_*(t)$ tak, aby $(\mathbf{t}(t), \mathbf{n}_*(t))$ byla kladně orientovaná ortonormální báze $\mathbb{R}^2$.

Pozn.:

(1) Zřejmě platí $|\kappa_z| = \kappa$.
(2) V neinflexních bodech křivky zřejmě platí $\mathbf{n}_*(t) = \sigma(t)\mathbf{n}(t)$.
(3) V každém bodě $t \in I$ regulární parametrizované křivky platí tato varianta Frenetových vzorců:

$$\begin{aligned} \mathbf{t}'(t) &= \|c'(t)\|\kappa_z(t)\mathbf{n}_*(t), \\ \mathbf{n}_*'(t) &= -\|c'(t)\|\kappa_z(t)\mathbf{t}(t). \end{aligned}$$

Tvrzení 2.11. *Pro regulární parametrizovanou křivku $c : I \to \mathbb{R}^2$ platí*

$$\kappa_z(t) = \frac{\det(c'(t), c''(t))}{\|c'(t)\|^3}, \quad t \in I.$$

Důkaz. Vztah plyne z definice κ_z a ze vzorce pro $\kappa(t)$ ve větě 2.4, neboť zřejmě platí

$$\det(c'(t), c''(t)) = \sigma(t)\|c'(t) \times c''(t)\|$$

(chápeme-li vektory na pravé straně jako vnořené do $\mathbb{R}^3$). □

Věta 2.12. *Buď $c : I \to \mathbb{R}^2$ regulární parametrizovaná křivka. Pak platí:*

(1) *$\kappa(t) = 0$, $t \in I$, právě když $c(I)$ je část přímky,*
(2) *$\kappa(t) = \kappa \neq 0$, $t \in I$, právě když $c(I)$ je část kružnice o poloměru κ^{-1}.*

Důkaz. Bez újmy na obecnosti předpokládejme, že křivka je parametrizována obloukem. V obou tvrzeních jsou implikace $\Longleftarrow$ zřejmé, dokážeme $\Longrightarrow$.

(1). Je-li $\kappa = 0$, z Frenetových vzorců dostaneme $0 = \mathbf{t}' = c''$, tedy $c(s) = as + b$.

(2). Buď $\kappa(s) = \kappa$ konstantní. Položíme $p(s) = c(s) + \kappa^{-1}\mathbf{n}(s)$; platí $p'(s) = \mathbf{t}(s) + \kappa^{-1}\mathbf{n}'(s)$ a opět z Frenetových vzorců máme $p'(s) = 0$, tedy $p(s) = p$ a $\|c(s) - p\| = |\kappa|^{-1}$. □

Definice 2.10. Je-li t neinflexním bodem křivky c v $\mathbb{R}^2$, nazýváme číslo $\rho(t) = \frac{1}{\kappa(t)}$ *poloměrem křivosti* a kružnici se středem $p(t) = c(t) + \rho(t)\mathbf{n}(t)$ a poloměrem $\rho(t)$ *oskulační kružnicí* křivky c v bodě t.

Pozn.: Křivka c a její oskulační kružnice mají v bodě $c(t)$ 'dotyk druhého řádu', tj. mají v tomto bodě společnou tečnu i křivost.

Definice 2.11. Buď $c : I \to \mathbb{R}^2$ regulární parametrizovaná křivka s nenulovou křivostí. Parametrizovaná křivka

$$p_c : t \mapsto c(t) + \rho(t)\mathbf{n}(t), \quad t \in I,$$

se nazývá *evolutou křivky* c. Původní křivka c se naopak nazývá *evolventou křivky* p_c.

Pozn.: Evoluta je tvořena středy oskulačních kružnic dané křivky. Evoluta nemusí být regulární parametrizovaná křivka (např. evoluta kružnice je tvořena jen jedním bodem).

Tvrzení 2.13. *Nechť je dána regulární parametrizovaná křivka $c : I \to \mathbb{R}^2$ a $t_0 \in I$, a nechť je křivost $\kappa(t)$ křivky c nenulová na I. Pak parametrizovaná křivka*

$$e : t \mapsto c(t) - \frac{c'(t)}{\|c'(t)\|} \int_{t_0}^{t} \|c'\|, \quad t \in I,$$

je její evolventou.

Důkaz. Označme $\ell(t) := \int_{t_0}^{t} \|c'\|$. Derivováním a užitím Frenetových vzorců spočteme

$$\begin{aligned} e' &= -\|c'\|\ell\kappa\mathbf{n}, \\ e'' &= \|c'\|^2\ell\kappa^2\mathbf{t} + \alpha\mathbf{n} \end{aligned}$$

pro nějakou skalární funkci α ($\mathbf{t}, \mathbf{n}, \kappa$ značí po řadě tečnu, normálu a křivost křivky c). Normála a křivost křivky e splňují $\mathbf{n}_e = (\operatorname{sgn} \ell)\mathbf{t}$, $\kappa_e = |\ell|^{-1}$. Evoluta křivky $\bar{c}$ má tedy parametrizaci

$$p_e = e + \kappa_e^{-1}\mathbf{n}_e = c,$$

čímž je tvrzení dokázáno. □

2.6. **Globální teorie rovinných křivek.**

Věta 2.14. *Buď $c : I \to \mathbb{R}^2$ křivka parametrizovaná obloukem. Pak existuje diferencovatelná funkce $\theta : I \to \mathbb{R}$ splňující*

$$\mathbf{t}(s) = (\cos\theta(s), \sin\theta(s)), \quad s \in I.$$

Funkce θ není určena jednoznačně, ale rozdíly $\theta(t_2) - \theta(t_1)$ nezávisí na volbě θ. Navíc platí

$$\kappa_z(s) = \theta'(s), \quad s \in I.$$

Důkaz. Funkce θ je spojitou verzí argumentu funkce $\mathbf{t}(t)$ (chápeme-li ji jako komplexní funkci) a její existence a diferencovatelnost je známa z komplexní analýzy. (Idea důkazu: Je-li tečna $\mathbf{t}(t) = (x(t), y(t))$ obsažena v polorovině $\{x > 0\}$, můžeme funkci θ definovat vztahem $\theta(t) := \operatorname{arctg} \frac{y(t)}{x(t)}$. Pro danou křivku pak definujeme $\theta(t)$ postupně na podintervalech, na nichž je obraz tečny obsažen v nějaké otevřené polorovině, přitom musíme hlídat "navazování" na již definované hodnoty.)

Zderivováním rovnice dostaneme

$$\mathbf{t}'(s) = \theta'(s)(-\sin\theta(s), \cos\theta(s)) = \theta'(s)\mathbf{n}_*(s).$$

Zároveň však platí $\mathbf{t}'(s) = \kappa_z(s)\mathbf{n}_*(s)$, tedy dostáváme $\theta'(s) = \kappa_z(s)$, $s \in I$. Nezávislost přírůstků funkce θ na volbě θ plyne z rovnosti

$$\theta(s_2) - \theta(s_1) = \int_{s_1}^{s_2} \kappa_z(s)\, ds.$$

□

Definice 2.12. Parametrizovaná křivka $c : [a, b] \to \mathbb{R}^2$ je *uzavřená*, jestliže $c(a) = c(b)$ a $c^{(i)}(a) = c^{(i)}(b)$ pro všechna $i \in \mathbb{N}$. Uzavřená křivka je *jednoduchá*, je-li c prosté na $[a, b)$. *Jordanova křivka* je jednoduchá uzavřená regulární parametrizovaná křivka.

Definice 2.13. Buď $c : [a, b] \to \mathbb{R}^2$ uzavřená křivka parametrizovaná obloukem. Číslo

$$n_c = \frac{\theta(b) - \theta(a)}{2\pi}$$

se nazývá *rotační index* křivky c.

Lemma 2.15. *Rotační index je celé číslo a platí*

$$n_c = \frac{1}{2\pi} \int_a^b \kappa_z(s)\, ds.$$

Důkaz. Z definice uzavřené křivky máme $\mathbf{t}(a) = \mathbf{t}(b)$, tedy $\theta(b) - \theta(a)$ je celým násobkem 2π. Poslední rovnost plyne z vlastnosti $\theta'(s) = \kappa_z(s)$ (Věta 2.14). □

Následující věta je sice intuitivně zřejmá, její formální důkaz však není triviální.

Věta 2.16 (Jordanova)**.** *Je-li c Jordanova křivka, pak existují otevřené souvislé množiny* $\operatorname{Int} c$ *(vnitřek c),* $\operatorname{Ext} c$ *(vnějšek c) takové, že* $\operatorname{Int} c$ *je omezená,* $\operatorname{Ext} c$ *neomezená a*

$$\mathbb{R}^2 = \operatorname{Int} c \cup \langle c \rangle \cup \operatorname{Ext} c$$

je disjunktní rozklad.

Řekneme, že Jordanova křivka $c : [a, b] \to \mathbb{R}^2$ je *kladně orientovaná*, jestliže pro každé t, $c(t) + \varepsilon\mathbf{n}_*(t) \in \operatorname{Int} c$ pro dostatečně malá ε. V opačném případě je křivka záporně orientovaná. (Při obvyklé orientaci roviny to znamená, že při průběhu křivky leží vnitřek oblasti "po levé ruce".)

Věta 2.17 (Umlaufsatz)**.** *Je-li c Jordanova křivka s kladnou (zápornou) orientací, pak $n_c = 1$ ($n_c = -1$).*

Myšlenka důkazu. Buď $c = (x, y) : [a, b] \to \mathbb{R}^2$ kladně orientovaná Jordanova křivka parametrizovaná obloukem. Označme $\Delta := \{(s, t) : a \leq s \leq t \leq b\}$ a definujme funkci $h : \Delta \to S^1$ předpisem

$$h(s, t) := \begin{cases} \mathbf{t}(s) & \text{pro } s = t, \\ -\mathbf{t}(a) & \text{pro } (s, t) = (a, b), \\ \frac{c(t) - c(s)}{\|c(t) - c(s)\|} & \text{jinak.} \end{cases}$$

Lze ukázat, že h je spojitá na Δ. Podle věty o existenci spojité větve argumentu z komplexní analýzy existuje spojitá funkce $\vartheta : \Delta \to \mathbb{R}$ taková, že

$$h(s,t) = (\cos\vartheta(s,t), \sin\vartheta(s,t)), \quad (s,t) \in \Delta.$$

Platí tedy

$$\int_a^b \kappa_z(s)\,ds = \theta(b) - \theta(a) = \vartheta(b,b) - \vartheta(a,a) = (\vartheta(a,b) - \vartheta(a,a)) + (\vartheta(b,b) - \vartheta(a,b)).$$

Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že $y(a) = \min\{y(s) : s \in [a,b]\}$. Pak $y'(a) = 0$ a $\mathbf{t}(a) = e_1$; BÚNO nechť $\vartheta(a,a) = 0$. Pak platí $h(a,s) \cdot e_2 \geq 0$ pro každé s, tedy $\vartheta(a,b) = \pi$. Podobně se ukáže, že $\vartheta(b,b) = 2\pi$. □

Lemma 2.18. *Buď $c = (x,y) : [a,b] \to \mathbb{R}^2$ kladně orientovaná Jordanova křivka. Pak plošný obsah oblasti* $\operatorname{Int} c$ *je roven*

$$A = -\int_a^b y(t)x'(t)dt = \int_a^b x(t)y'(t)dt = \frac{1}{2}\int_a^b (xy' - x'y)dt. \tag{1}$$

Důkaz. Jedná se o velmi speciální případ Greenovy věty pro rovinné křivky, která je součástí přednášky Matematická analýza 4. Greenova věta říká, že je-li $c : [a,b] \to \mathbb{R}^2$ kladně orientovaná Jordanova křivka a $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ diferencovatelné vektorové pole, pak

$$\int_a^b F(c(s)) \cdot c'(s)\,ds = \int_{\operatorname{Int} c} \left(\frac{\partial F^2}{\partial x} - \frac{\partial F^1}{\partial y} \right) dxdy.$$

Volbou $F(x,y) = (-y,0)$ dostaneme první vzorec, volbou $F(x,y) = (0,x)$ druhý vzorec, třetí je jejich aritmetickým průměrem. □

Pozn.: Je-li $\phi : [\alpha,\beta] \to [a,b]$ diferencovatelná funkce (ne nutně prostá) splňující $\phi(\alpha) = a$, $\phi(\beta) = b$, pak vzorce (1) platí i pro reparametrizaci Jordanovy křivky $\tilde{x}(s) = x(\phi(s))$, $\tilde{y}(s) = y(\phi(s))$, $s \in I$. (Ukáže se jednoduchou substitucí v integrálech.) Dokonce lze použít i *po částech diferencovatelnou* reparametrizaci.

Věta 2.19 (Isoperimetrická nerovnost)**.** *Buď $c : [a,b] \to \mathbb{R}^2$ Jordanova křivka délky L a buď A plošný obsah vnitřku* $\operatorname{Int} c$. *Pak*

$$L^2 - 4\pi A \geq 0,$$

přitom rovnost nastane, právě když $c[a,b]$ *je kružnice.*

Důkaz. Mějme Jordanovu křivku parametrizovanou obloukem $c(s) = (x(s), y(s))$, $s \in [0,L]$, a položme

$$2r := \operatorname{diam} < c >= \sup_{0 \leq s_0 < s_1 \leq L} \|c(s_1) - c(s_0)\}.$$

Suprema ve výše uvedeném výrazu je jistě nabyto (ze spojitosti) a nechť je tomu tak v bodech s_0, s_1. Dále BÚNO nechť $s_0 = 0$. Konečně, posunutím a natočením křivky můžeme dosáhnout toho, že $x(0) = r$, $x(s_1) = -r$ a $y(0) = y(s_1) = 0$. Z definice diametru je zřejmé, že $|x(s)| < r$ kdykoliv $s \neq 0$ a $s \neq s_1$. Dále označme

$$\bar{y}(s) = \begin{cases} \sqrt{r^2 - x(s)^2}, & s \in [0, s_1], \\ -\sqrt{r^2 - x(s)^2}, & s \in [s_1, L]. \end{cases}$$

Funkce $\bar{y}$ je diferencovatelná na intervalech $(0, s_1)$ a (s_1, L), a tedy $s \mapsto (x(s), \bar{y}(s))$ je po částech hladká reparametrizace (ve smyslu výše uvedené poznámky) kružnice se středem v počátku a poloměrem r. Podle předchozího Lemmatu (a poznámky za ním) máme tedy

$$A = \int_0^L xy'\,ds, \quad \pi r^2 = -\int_0^L \bar{y}x'\,ds,$$

tudíž

$$A + \pi r^2 = \int_0^L (xy' - \bar{y}x')ds.$$

Podle Schwartzovy nerovnosti

$$xy' - \bar{y}x' = \begin{pmatrix} x \\ -\bar{y} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y' \\ x' \end{pmatrix} \le \sqrt{(x^2+\bar{y}^2)(x'^2+y'^2)} = \sqrt{x^2+\bar{y}^2} = r,$$

máme tedy odhad

$$A + \pi r^2 \le Lr.$$

Podle známé nerovnosti mezi aritmetickým a geometrickým průměrem je

$$\sqrt{A}\sqrt{\pi r^2} \le \frac{1}{2}(A + \pi r^2) \le \frac{1}{2}Lr,$$

a tedy $4\pi A r^2 \le L^2 r^2$, čímž je nerovnost dokázána.

Předpokládejme nyní, že nastal případ $L^2 = 4\pi A$. Z postupu důkazu je zřejmé, že musí být $A = \pi r^2$ (rovnost v AG-nerovnosti); pak ale $L = 2\pi r$ a tedy délka průmětu $2r$ nezávisí na směru promítání. Dále musí platit rovnost ve Schwartzově nerovnosti pro vektory $(x, -\bar{y})^T$, $(y', x')^T$, tedy $(x, -\bar{y})^T = \alpha(y', x')^T$ pro nějaké $\alpha \in \mathbb{R}$. Porovnáním délek obou vektorů dostaneme $\alpha = \pm r$, a tedy $x = \pm r y'$. Protože r nezávisí na směru promítání, můžeme zaměnit proměnné a platí též $y = \pm r x'$, z čehož plyne

$$x^2 + y^2 = r^2(x'^2 + y'^2) = r^2,$$

tedy obraz c je kružnice. $\square$

3. Sférická geometrie

V této kapitole se budeme zabývat geometrií na jednotkové sféře v prostoru

$$\mathbb{S}^2 := \{x \in \mathbb{R}^3 : \|x\| = 1\}.$$

Definice 3.1. *Hlavní kružnice* na sféře je libovolná kružnice $\ell \subset \mathbb{S}^2$ jednotkového poloměru (lze ji tedy vyjádřit jako průnik $\mathbb{S}^2$ s rovinou procházející počátkem). Hlavní kružnice se nazývají též ***přímkami*** na sféře. *Úsečkou* na sféře rozumíme libovolný oblouk hlavní kružnice délky nejvýše rovné π.

Pozn.: Je zřejmé, že pro každou dvojici $A, B \in \mathbb{S}^2$ různých bodů na sféře, které nejsou *antipodální* (tedy $A \ne \pm B$) existuje právě jedna úsečka na sféře spojující A, B (leží v hlavní kružnici dané průnikem sféry s rovinou určenou body A, B a počátkem).

Definice 3.2. *Vzdálenost* bodů $A, B \in \mathbb{S}^2$ definujeme jako délku úsečky spojující tyto body.

Pozn.: Lze ukázat, že délka libovolné křivky na sféře spojující dva body je větší nebo rovna vzdálenosti těchto bodů, přitom rovnost nastává právě tehdy, když se jedná o úsečku. Toto bude později vyplývat z teorie geodetických křivek.

Definice 3.3. Buďte AB a AC dvě úsečky na sféře s délkami z intervalu $(0, \pi)$. *Úhel* sevřený těmito úsečkami definujeme jako úhel sevřený rovinami OAB a OAC (tedy rovinami vytínajícími příslušné hlavní kružnice). (Ekvivalentně jej lze definovat jako úhel (v $\mathbb{R}^3$) sevřený tečnami k příslušným hlavním kružnicím v bodě A.)

Pro výpočet plošného obsahu oblasti na sféře můžeme použít standardní sférické souřadnice, tedy prosté zobrazení

$$\phi : \left\{ \begin{array}{lcl} x(\varphi, \psi) & = & \cos(\varphi)\cos(\psi), \\ y(\varphi, \psi) & = & \sin(\varphi)\cos(\psi), \\ z(\varphi, \psi) & = & \sin(\psi) \end{array} \right. \qquad \varphi \in (-\pi, \pi), \ , \psi \in (-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}).$$

Jakobián $\phi(\varphi, \psi)$ je roven $\cos \psi$, takže pro Borelovskou podmnožinu $U \subset \mathbb{S}^2$ máme

$$S(U) = \iint_{\phi^{-1}(U)} \cos \psi \, d\varphi \, d\psi.$$

Definice 3.4. Buďte dány tři různé body $A, B, C \in \mathbb{S}^2$ takové, že vektory (z počátku) A, B, C jsou lineárně nezávislé. Úsečky AB, AC a BC (délek v $(0, \pi)$) vymezují dvě souvislé oblasti na sféře, z nichž tu o menším obsahu nazýváme sférickým trojúhelníkem a značíme Δ_{ABC}. (Formálně lze sférický trojúhelník definovat jako průnik tři polosfér s hranicemi tvořenými hlavními kružnicemi obsahujícími příslušné úsečky.)

Věta 3.1. *Plošný obsah sférického trojúhelníka Δ_{ABC} je roven*

$$S(\Delta_{ABC}) = \alpha + \beta + \gamma - \pi,$$

kde α, β, γ jsou velikosti úhlů trojúhelníka u vrcholů A, B, C.

Důkaz. Označme $A' = -A$, $B' = -B$ a $C' = -C$ body protilehlé bodům A, B, C. Celou sféru lze pokrýt osmi trojúhelníky s disjunktními vnitřky

$$\mathbb{S}^2 = \Delta_{ABC} \cup \Delta_{ABC'} \cup \Delta_{AB'C} \cup \Delta_{A'BC} \cup \Delta_{AB'C'} \cup \Delta_{A'BC'} \cup \Delta_{A'B'C} \cup \Delta_{A'B'C'},$$

přitom těchto osm trojúhelníků je tvořeno čtyřmi páry vzájemně izometrických trojúhelníků (např. $\Delta_{ABC} \approx \Delta_{A'B'C'}$, $\Delta_{ABC'} \approx \Delta_{A'B'C}$). Protože celá sféra má plošný obsah 4π dostaneme rovnost

$$2\pi = S(\Delta_{ABC}) + S(\Delta_{ABC'}) + S(\Delta_{AB'C}) + S(\Delta_{A'BC}).$$

Dále si všimneme, že dvojice trojúhelníků $\Delta_{ABC} \cup \Delta_{A'BC}$ pokrývá oblast vymezenou dvěma polosférami s hraničními hlavními kružnicemi obsahujícími úsečky AB a AC, tedy svírajícími úhel α. Tato oblast má plošný obsah 2α, máme tedy rovnost

$$2\alpha = S(\Delta_{ABC}) + S(\Delta_{A'BC}).$$

Podobnou úvahou dostaneme

$$2\beta = S(\Delta_{ABC}) + S(\Delta_{AB'C}),$$
$$2\gamma = S(\Delta_{ABC}) + S(\Delta_{ABC'}).$$

Sečteme-li poslední tři rovnosti a odečteme od ní tu předcházející, dostaneme požadovaný vzorec. □

Ve sférické geometrii platí sinová věta jako v euklidovském případě.

Věta 3.2 (Sinová věta ve sférické geometrii)**.** *Pro sférický trojúhelník Δ_{ABC} se stranami délek a, b, c a velikostmi protilehlých úhlů α, β, γ platí*

$$\frac{\sin a}{\sin \alpha} = \frac{\sin b}{\sin \beta} = \frac{\sin c}{\sin \gamma}.$$

Důkaz. Použijeme následující identitu, která platí pro libovolné tři vektory $u, v, w \in \mathbb{R}^3$:

$$u \times (v \times w) = (u \cdot w)v - (u \cdot v)w.$$

(Vzhledem k linearitě stačí identitu ověřit pro vektory kanonické báze, což je snadné.)

Použijeme-li identitu pro vektory $B \times C, C$ a A (body A, B, C jednotkové sféry můžeme chápat též jako vektory z počátku), dostaneme

$$(B \times C) \times (C \times A) = ((B \times C) \cdot A)C$$

(protože $(A \times B) \cdot B = 0$). Označme

$$\mathbf{n}_a := (\sin a)^{-1} B \times C, \quad \mathbf{n}_b := (\sin b)^{-1} C \times A, \quad \mathbf{n}_c := (\sin c)^{-1} A \times B.$$

Jsou to jednotkové vektory, kolmé k rovinám (po řadě) OBC, OAC, OAB, a jejich úhly jsou

$$\angle(\mathbf{n}_a, \mathbf{n}_b) = \pi - \gamma, \quad \angle(\mathbf{n}_a, \mathbf{n}_c) = \pi - \beta, \angle(\mathbf{n}_b, \mathbf{n}_c) = \pi - \alpha.$$

Po dosazení do výše uvedené rovnosti máme

$$(\sin a \sin b)\mathbf{n}_a \times \mathbf{n}_b = \det(A, B, C)\, C.$$

Opět z vlastností vektorového součinu je zřejmé, že $\mathbf{n}_a \times \mathbf{n}_b = (\pm \sin \gamma)C$, a tedy, dosazením a porovnáním velikosti dostáváme (siny všech uvažovaných úhlů jsou kladné)

$$\sin a \sin b \sin \gamma = |\det(A, B, C)|.$$

Protože výraz vpravo se nemění při kladné permutaci vrcholů trojúhelníka, platí rovnost

$$\sin a \sin b \sin \gamma = \sin b \sin c \sin \alpha = \sin c \sin a \sin \beta,$$

a vydělením výrazem $\sin a \sin b \sin c$ dostaneme kýženou rovnost. □

Cosinová věta má ve sférické geometrii odlišnou podobu.

Věta 3.3 (Cosinová věta ve sférické geometrii)**.** *Za předpokladů věty 3.2 platí*

$$\cos c = \cos a \cos b + \sin a \sin b \cos \gamma.$$

Důkaz. Použijeme identitu (viz Cvičemí (1) za Větou 1.2)

$$(B \times C) \cdot (C \times A) = (B \cdot C)(C \cdot A) - (B \cdot A)(C \cdot C) = (B \cdot C)(C \cdot A) - (B \cdot A).$$

S využitím normál z důkazu předchozí věty pak dostaneme

$$(\sin a \sin b)\mathbf{n}_a \cdot \mathbf{n}_b = \cos b \cos a - \cos c,$$

a protože zřejmě je $\mathbf{n}_a \cdot \mathbf{n}_b = \cos(\pi - \gamma) = -\cos \gamma$, máme

$$-(\sin a \sin b) \cos \gamma = \cos b \cos a - \cos c.$$

□

Důsledek 3.4 (Pythagorova věta ve sférické geometrii)**.** *Pro pravoúhlý sférický trojúhelník ($\gamma = \frac{\pi}{2}$) platí*

$$\cos c = \cos a \cos b.$$

4. Plochy

4.1. **Základní pojmy.**

Definice 4.1. *Parametrizovaná plocha* v $\mathbb{R}^3$ je diferencovatelné zobrazení

$$f : U \to \mathbb{R}^3,$$

kde U je otevřená podmnožina $\mathbb{R}^2$ a df_u je prosté pro každé $u \in U$. Množina $f(U) \subseteq \mathbb{R}^3$ se nazývá *obraz* parametrizované plochy f. Je-li navíc zobrazení $f : U \to f(U)$ homeomorfismus, nazýváme f *mapou.*

Pozn.: Vektory parciálních derivací

$$f_{u^1}(u) = \frac{\partial f}{\partial u^1}(u), \quad f_{u^2}(u) = \frac{\partial f}{\partial u^2}(u)$$

parametrizované plochy f v bodě u jsou dle předpokladu lineárně nezávislé.

Věta 4.1. *Buď $f : U \to \mathbb{R}^3$ parametrizovaná plocha, $V \subseteq \mathbb{R}^2$ otevřená a $\phi : V \to U$ difeomorfismus V na U. Pak $\tilde{f} = f \circ \phi$ je parametrizovaná plocha se stejným obrazem jako f.*

Důkaz. Podle pravidla o diferenciálu složeného zobrazení platí

$$d\tilde{f}_v = df_{\phi(v)} \circ d\phi_v.$$

Podle předpokladů mají obě lineární zobrazení na pravé straně hodnost 2, a tedy i $d\tilde{f}_v$ má hodnost 2 pro každé $v \in V$. □

Definice 4.2. Zobrazení ϕ z předchozí věty se nazývá *změna parametru* plochy f. Je-li $\det d\phi > 0$ na V, nazývá se *změnou parametru zachovávající orientaci.*

Pozn.: Záměna souřadnic $(v^1, v^2)^T \mapsto (v^2, v^1)^T$ je změnou parametru, která nezachovává orientaci.
Příklady:

(1) $f(u^1, u^2) = \mathbf{a} + u^1\mathbf{b} + u^2\mathbf{c}$, $U = \mathbb{R}^2$ ($\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \in \mathbb{R}^3$) - rovina ($\mathbf{a}, \mathbf{b}$ lineárně nezávislé),
(2) $f(u^1, u^2) = (\cos u^1 \cos u^2, \sin u^1 \cos u^2, \sin u^2)^T$, $U = \mathbb{R} \times (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ - jednotková sféra bez pólů,
(3) $f(u^1, u^2) = (u^1, u^2, \sqrt{1 - (u^1)^2 - (u^2)^2})^T$, $U = \{(u^1)^2 + (u^2)^2 < 1\}$ - otevřená polosféra,
(4) $f(u^1, u^2) = \big(p(u^1) \cos u^2, p(u^1) \sin u^2, q(u^1)\big)^T$, $U = I \times \mathbb{R}$ - rotační plocha (vznikne rotací regulární parametrizované křivky $u^1 \mapsto \big(p(u^1), 0, q(u^1)\big)^T$ ležící v rovině $\{x^2 = 0\}$ kolem osy x^1; předpokládáme $p \neq 0$ a $(p')^2 + (q')^2 > 0$).

Pozn.: Parametrizovaná plocha nemusí být mapou, ani když je zobrazení f prosté. Lokálně ale tento výsledek platí:

Věta 4.2. *Buď $f : U \to \mathbb{R}^3$ parametrizovaná plocha.*

(i) *Ke každému bodu $u \in U$ existuje okolí $U_0 \subset U$ bodu u takové, že f je prosté na U_0.*
(ii) *Nechť f je prosté a nechť $U_0 \subset U$ je omezená otevřená podmnožina s $\overline{U_0} \subset U$. Pak restrikce $f|U_0$ je mapa.*

Důkaz. (i): Buď $u \in U$. Protože matice diferenciálu df_u má hodnost 2, její aspoň jedna čtvercová matice 2×2 musí být regulární; BÚNO předpokládejme, že je to matice

$$\left(\frac{\partial f^i}{\partial u^j}(u) \right)^2_{i,j=2}.$$

Pak složení $\Pi \circ f$, kde Π je projekce v $\mathbb{R}^3$ do prvních dvou souřadnic, má regulární matici parciálních derivací v bodě u, a je tedy podle věty o inverzním zobrazení difeomorfismem na nějakém okolí bodu u. Pak ale f musí být na tomto okolí prosté.

V důkazu části (ii) potřebujeme ukázat, že f je homeomorfismus U_0 na $f(U_0)$. Protože f je diferencovatelné, je jistě spojité. Stačí tedy dokázat, že i f^{-1} je spojité na $f(U_0)$.

Předpokládejme pro spor, že f^{-1} není spojité na $f(U_0)$, tedy že existuje posloupnost bodů $x_n = f(u_n) \in f(\overline{U_0})$ takových, že $x_n \to x_0 = f(u_0)$, ale $f^{-1}(x_n) \not\to f^{-1}(x_0)$, tedy $u_n \not\to u_0$. Množina $\overline{U_0} \subset U$ je kompaktní, podle Weierstrassovy věty tedy existuje podposloupnost (u_{n_k}) posloupnosti (u_n), která konverguje k bodu $u' \neq u_0$, $u' \in U_0$. Protože f je spojité na U, musí platit $x_{n_k} = f(u_{n_k}) \to f(u')$. Z jednoznačnosti limity pak máme $f(u_0) = f(u')$, a z prostoty f též $u_0 = u'$, což je spor. □

Definice 4.3. *Plocha* v $\mathbb{R}^3$ je neprázdná podmnožina $S \subseteq \mathbb{R}^3$ taková, že ke každému $x \in S$ existuje otevřené okolí $V \subseteq \mathbb{R}^3$ bodu x, otevřená množina $U \subseteq \mathbb{R}^2$ a mapa $f : U \to V$ taková, že $f(U) = S \cap V$.

Pozn.: Analogicky lze definovat k-rozměrnou plochu v $\mathbb{R}^n$ ($k \leq n$) jako množinu, kterou lze "lokálně popsat k-rozměrnou mapou".

Lemma 4.3. *Buď $U \subseteq \mathbb{R}^2$ otevřená a $h : U \to \mathbb{R}$ diferencovatelná funkce. Pak* $\operatorname{graf} h = \{(u, h(u)) : u \in U\}$ *je plocha.*

Důkaz. Zobrazení $f : u \mapsto (u, h(u))$ je diferencovatelné a prosté, rovněž df_u je prosté pro každé $u \in U$. Zobrazení f^{-1} z $\operatorname{graf} h$ na U je spojité, neboť je restrikcí spojitého zobrazení (projekce do prvních dvou souřadnic). f je tedy mapa s obrazem $\operatorname{graf} h$. □

Definice 4.4. Buď $G \subseteq \mathbb{R}^3$ otevřená a $F : G \to \mathbb{R}$ diferencovatelná. Bod $x \in G$ je *kritickým bodem* funkce F, jestliže $dF_x = 0$. $F(x)$ je pak *kritickou hodnotou* funkce F. $a \in F(G)$ je *regulární hodnotou* funkce F, jestliže $F^{-1}(a)$ neobsahuje žádný kritický bod F.

Věta 4.4. *Buď $G \subseteq \mathbb{R}^3$ otevřená, $F : G \to \mathbb{R}$ diferencovatelná taková, že* 0 *je regulární hodnota F. Pak $F^{-1}(0)$ je plocha.*

Důkaz. Buď $x_0 \in F^{-1}(0)$. Podle předpokladu je $dF_{x_0} \neq 0$, tedy existuje souřadnice (bez újmy na obecnosti předpokládejme, že x^3) taková, že $dF_{x_0}(e_3) = \frac{\partial F}{\partial x^3}(x_0) \neq 0$. Podle věty o implicitních funkcích existuje okolí U bodu (x_0^1, x_0^2), okolí V bodu x_0^3 a diferencovatelná funkce $g : U \to V$ tak, že $g(x_0^1, x_0^2) = x_0^3$ a pro každé $(x^1, x^2) \in U$ je $g(x^1, x^2)$ jediným bodem V, pro nějž platí $F(x^1, x^2, g(x^1, x^2)) = 0$. Z uvedeného plyne, že $F^{-1}(0) \cap (U \times V)$ je grafem funkce g, je tedy plochou podle předchozího Lemmatu. Protože tento postup lze provést pro každý bod $x \in F^{-1}(0)$, je $F^{-1}(0)$ plocha. □

Příklady: Množiny bodů $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ splňující níže uvedené rovnice jsou plochy v $\mathbb{R}^3$ ($a, b, c > 0$ jsou pevné parametry):

(1) $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ - sféra,
(2) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ - elipsoid,
(3) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$ - jednodílný hyperboloid,
(4) $z = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$ - eliptický paraboloid,
(5) $z = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}$ - hyperbolický paraboloid,
(6) $z = \frac{x^2}{a^2}$ - parabolický válec,
(7) $(\sqrt{x^2 + y^2} - a)^2 + z^2 = b^2$ - torus $(a > b > 0)$.

Pod uvedenými názvy rozumíme samozřejmě i obrazy výše zadaných ploch při libovolné shodnosti. Plochy 1-6 se nazývají *kvadriky.*

4.2. **Křivky na ploše a tečný prostor.**

Definice 4.5. *Křivkou na ploše* $S \subset \mathbb{R}^3$ rozumíme regulární parametrizovanou křivku $c : I \to \mathbb{R}^3$ s vlastností $< c > \subset S$ (obraz křivky leží na ploše S).

Tvrzení 4.5. *Leží-li regulární parametrizovaná křivka* $c : I \to \mathbb{R}^3$ *na části plochy* S *pokryté obrazem jedné mapy* $f : U \to S$*, pak* $u := f^{-1} \circ c : I \to U$ *je regulární parametrizovaná křivka a platí* $c = f \circ u$*.*

Pozn.: Zřejmě platí

$$c'(t) = df_{u(t)}(u'(t)) = (u^1)'(t) f_{u^1}(u(t)) + (u^2)'(t) f_{u^2}(u(t)), \quad t \in I.$$

Důkaz. Funkce $u = f^{-1} \circ c$ je zřejmě spojitá na I. Ukážeme, že je diferencovatelná. Zvolme $t_0 \in I$ a označme $x_0 := c(t_0)$, $u_0 := f^{-1}(x_0)$ a $f = (f^1, f^2, f^3)^T$. Předpokládejme bez újmy na obecnosti, že matice

$$\left(\frac{\partial f^i}{\partial u^j}(u_0) \right)_{i,j=1}^2$$

je regulární (značíme (jinak provedeme záměnu souřadnic). Označme $\Pi : (x^1, x^2, x^3) \mapsto (x^1, x^2)$ projekci do prvních dvou souřadnic a $v_0 := \Pi(x_0)$. Zobrazení $g := \Pi \circ f : U \to \mathbb{R}^2$ je zřejmě diferencovatelné a má regulární diferenciál

$$dg_{u_0} = \Pi \circ df_{u_0}$$

v bodě u_0, proto podle věty o inverzním zobrazení existuje inverze $(\Pi \circ f)^{-1}$ na nějakém okolí V bodu v_0 a platí

$$d(g^{-1})_{v_0} = (\Pi \circ df_{u_0})^{-1}.$$

Pro body $t \in I$ takové, že $\Pi(c(t)) \in V$, pak zřejmě platí

$$u(t) = f^{-1} \circ c(t) = g^{-1} \circ \Pi \circ c(t),$$

a tedy u je diferencovatelné v bodě t_0. Z regularity $c(t)$ a ze vztahu $c'(t) = df_{u(t)}(u'(t))$ plyne regularita $u(t)$. □

Definice 4.6. Řekneme, že vektor $v \in \mathbb{R}^3$ je *tečným vektorem* k ploše S v bodě $x \in S$, jestliže $v = 0$ nebo existuje regulární parametrizovaná křivka $c : I \to \mathbb{R}^3$ na ploše S a bod $t_0 \in I$ takový, že $c(t_0) = x$ a $c'(t_0) = v$. Množinu všech tečných vektorů plochy S v bodě x značíme T_xS.

Věta 4.6. *Je-li $S \subset \mathbb{R}^3$ plocha a $x \in S$, pak T_xS je dvourozměrný lineární podprostor v $\mathbb{R}^3$. Je-li $f : U \to \mathbb{R}^3$ mapa plochy S s vlastností $f(u) = x$ pro nějaký $u \in U$, pak vektory parciálních derivací $f_{u^1}(u)$, $f_{u^2}(u)$ tvoří bázi T_xS a lineární zobrazení df_u je bijekcí $\mathbb{R}^2$ na T_xS.*

Důkaz. Ukážeme, že T_xS je roven lineárnímu obalu vektorů $f_{u^1}(u)$ a $f_{u^2}(u)$. Protože tyto dva vektory jsou dle předpokladu nezávislé, bude tím důkaz ukončen.

Jsou-li $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $(\alpha, \beta) \neq (0, 0)$ a $v = \alpha f_{u^1}(u) + \beta f_{u^2}(u)$, pak parametrizovaná křivka

$$c : t \mapsto f(u^1 + \alpha t, u^2 + \beta t), \quad t \in (-\delta, \delta)$$

(pro dostatečně malé $\delta > 0$) je regulární, leží na ploše S a platí $c'(t) = v$, tedy $v \in T_xS$.

Je-li naopak $c : I \to \mathbb{R}^3$ regulární parametrizovaná křivka ležící v obrazu mapy f a s vlastností $c(t_0) = x$, pak podle Tvrzení 4.5 je $c = f \circ u$ pro regulární parametrizovanou křivku $u = f^{-1} \circ c$, tudíž

$$c'(t_0) = df_{u(t_0)} u'(t_0) = (u^1)'(t_0) f_{u^1}(u) + (u^2)'(t_0) f_{u^2}(u),$$

tedy $c'(t_0)$ leží v lineárním obalu vektorů $f_{u^1}(u)$ a $f_{u^2}(u)$. □

4.3. **První fundamentální forma.**

Definice 4.7. Buď $S \subset \mathbb{R}^3$ plocha a $x \in S$. Bilineární formu

$$I_x(X, Y) := X \cdot Y, \quad X, Y \in T_xS$$

na tečné rovině T_xS nazveme *první fundamentální formou* plochy S v bodě x. Je-li $f : U \to S$ mapa plochy S s $f(u) = x$, pak vzor I_x při df_u je bilineární forma na $\mathbb{R}^2$, kterou budeme značit

$$g_u(\xi, \zeta) = I_x\big(df_u(\xi), df_u(\zeta)\big) = df_u(\xi) \cdot df_u(\zeta), \quad \xi, \zeta \in \mathbb{R}^2.$$

g_u nazveme *první fundamentální formou* plochy v bodě u a její matici označíme rovněž

$$g_u = \Big(g_u(e_i, e_j)\Big)_{i,j=1}^2 = \begin{pmatrix} f_{u^1} \cdot f_{u^1}, & f_{u^1} \cdot f_{u^2} \\ f_{u^2} \cdot f_{u^1}, & f_{u^2} \cdot f_{u^2} \end{pmatrix}.$$

Pozn.: I_x je restrikcí skalárního součinu v $\mathbb{R}^3$ na T_xS, I_x i g_u jsou proto symetrické pozitivně definitní bilineární formy. Jak uvidíme dále, první fundamentální forma určuje metrické vlastnosti plochy.

Pozn.: Je zřejmé, že první fundamentální formu můžeme definovat i pro parametrizovanou plochu (neboť každá parametrizovaná plocha je lokálně mapou podle tvrzení 4.2).

Věta 4.7. *Je-li $c : I \to S$ regulární parametrizovaná křivka na ploše $S \subset \mathbb{R}^3$, pak její délka je*

$$L(c) = \int_I \sqrt{I_{c(t)}(c'(t), c'(t))}\, dt.$$

Důkaz. Vzorec plyne přímo z definice první fundamentální formy. □

Pozn.: Je-li $f : U \to \mathbb{R}^3$ parametrizovaná plocha a $u : I \to U$ regulární křivka v $U \subseteq \mathbb{R}^2$, pak je $c = f \circ u$ regulární křivka na ploše f a její délka je

$$L = \int_I \sqrt{g_u\big(u'(t), u'(t)\big)}\, dt.$$

Věta 4.8. *Je-li $f : U \to S$ mapa plochy S, pak plošný obsah borelovské podmnožiny plochy $W \subset f(U) \subset S$ pokryté mapou f je roven*

$$S(W) = \int_{f^{-1}(W)} \sqrt{\det g_u}\, du.$$

Důkaz. Vztah plyne z věty o substituci, neboť $\sqrt{\det g_u}$ je Jakobián zobrazení f v bodě u. (Viz přednáška Matematická analýza 4.) $\square$

Pozn.: Je-li $f : U \to \mathbb{R}^3$ parametrizovaná plocha s první f.f. g a $\phi : V \to U$ změna parametru, pak pro první f.f. $\tilde{g}$ parametrizované plochy $\tilde{f} = f \circ \phi$

$$\tilde{g}_v(\xi, \zeta) = g_{\phi(v)}\big(d\phi_v(\xi), d\phi_v(\zeta)\big), \quad \xi, \zeta \in \mathbb{R}^2, \quad v \in V.$$

Rovnost plyne ze vztahu pro diferenciál složeného zobrazení

$$d\tilde{f}_v = df_{\phi(v)} \circ d\phi_v.$$

Věta 4.9. *Buď $f : U \to \mathbb{R}^3$ parametrizovaná plocha a $A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ shodnost. Označme $\bar{f} = A \circ f$ a $\bar{g}$ první fundamentální formu příslušnou $\bar{f}$. Pak pro $u \in U$ platí*

$$\bar{g}_u = g_u.$$

Důkaz. Podle pravidel derivování složeného zobrazení platí $d\bar{f}_u = A_0 \circ df_u$, kde $A_0(\cdot) = A(\cdot) - A(0)$ je lineární složka afinního zobrazení A. Protože A_0 zachovává skalární součin, dostaneme

$$\bar{g}_u(\xi, \zeta) = d\bar{f}_u(\xi) \cdot d\bar{f}_u(\zeta) = A_0(df_u(\xi)) \cdot A_0(df_u(\zeta)) = df_u(\xi) \cdot df_u(\zeta) = g_u(\xi, \zeta).$$

$\square$

4.4. **Diferencovatelná zobrazení na ploše.**

Tvrzení 4.10. *Buďte $f : U \to S$, $\tilde{f} : \tilde{U} \to S$ dvě mapy plochy S takové, že $M := f(U) \cap \tilde{f}(\tilde{U}) \neq \emptyset$. Pak zobrazení*

$$\tilde{f}^{-1} \circ f : f^{-1}(M) \to \tilde{f}^{-1}(M)$$

je difeomorfismus a platí

$$d(\tilde{f}^{-1} \circ f)_u = (d\tilde{f}_{\tilde{u}})^{-1} \circ df_u,$$

jestliže $f(u) = \tilde{f}(\tilde{u}) \in M$.

Důkaz. Buď $x = f(u) = \tilde{f}(\tilde{u}) \in M$. Bez újmy na obecnosti předpokládejme, že tečná rovina T_xS není rovnoběžná s osou z (jinak provedeme záměnu souřadnic). Označme $\Pi : (x, y, z) \mapsto (x, y)$ projekci. Zobrazení $g := \Pi \circ f$ a $\tilde{g} := \Pi \circ \tilde{f}$ jsou diferencovatelná a diferenciály dg_u, $d\tilde{g}_{\tilde{u}}$ jsou regulární, tedy podle věty o inverzním zobrazení je g ($\tilde{g}$) difeomorfismus na nějakém okolá bodu u ($\tilde{u}$). Pak ale je $\tilde{f}^{-1} \circ f = \tilde{g}^{-1} \circ g$ difeomorfismus na nějakém okolí bodu u. Vztah pro diferenciály plyne z rovnosti $f = \tilde{f} \circ (\tilde{f}^{-1} \circ f)$ a ze vzorce pro diferenciál složeného zobrazení. $\square$

Definice 4.8. Zobrazení $\Phi : S \to \mathbb{R}^k$ definované na ploše S je *diferencovatelné*, jestliže $\Phi \circ f$ je diferencovatelné pro každou mapu f plochy S. Je-li $f : U \to S$ mapa a $x = f(u)$, definujeme diferenciál Φ v bodě x jako

$$d\Phi_x := d(\Phi \circ f)_u \circ (df_u)^{-1} : T_xS \to \mathbb{R}^k.$$

Pozn.:

(1) Diferencovatelnost Φ stačí (podle předchozího tvrzení) ověřit jen pro mapy z nějakého atlasu ploch S (souboru map, jejichž obrazy plochu pokrývají).

(2) Definice diferenciálu zobrazení na ploše je korektní, protože je-li $\tilde{f} : \tilde{U} \to S$ jiná mapa s $x = \tilde{f}(\tilde{u})$, pak platí $\Phi \circ f = \Phi \circ \tilde{f} \circ \tilde{f}^{-1} \circ f$ na okolí bodu u, a tedy

$$d(\Phi \circ f)_u = d(\Phi \circ \tilde{f})_{\tilde{u}} \circ d(\tilde{f}^{-1} \circ f)_u = d(\Phi \circ \tilde{f})_{\tilde{u}} \circ (d\tilde{f}_{\tilde{u}})^{-1} \circ df_u,$$

z čehož plyne $d(\Phi \circ f)_u \circ (df_u)^{-1} = d(\Phi \circ \tilde{f})_{\tilde{u}} \circ (d\tilde{f}_{\tilde{u}})^{-1}$.

Definice 4.9. Diferencovatelné zobrazení $\Phi : S_1 \to S_2$ mezi dvěma plochami se nazývá *lokální difeomorfismus*, jestliže pro každý bod $x \in S_1$ má diferenciál $d\Phi_x$ hodnost 2.

Pozn.: Lokální difeomorfismus nemusí být prosté zobrazení, ale je vždy "lokálně prosté".

Tvrzení 4.11. *Buď $\Phi : S_1 \to S_2$ lokální difeomorfismus.*

(i) *Je-li $c : I \to S_1$ regulární parametrizovaná křivka na ploše S_1, je $\Phi \circ c : I \to S_2$ regulární parametrizovaná křivka na ploše S_2.*

(ii) *Pro každý $x \in S_1$ je $d\Phi_x : T_xS_1 \to T_{\Phi(x)}S_2$ (lineární) bijekce.*

Důkaz. (i). Zobrazení $\Phi \circ c$ je zřejmě spojité na I, dokážeme diferencovatelnost a regularitu. Buď $t \in I$ a zvolme mapu f plochy S_1 tak, aby její obraz obsahoval bod $c(t)$. Pak $c = f \circ u$ podle Tvrzení 4.5 s diferencovatelnou křivkou u v U, a tedy $\Phi \circ c = \Phi \circ f \circ u$ je diferencovatelné na okolí t, přitom

$$(\Phi \circ c)'(t) = (\Phi \circ f \circ u)'(t) = d\Phi_{c(t)}(c'(t))$$

je nenulový vektor, neboť $c'(t)$ je nenulový a $d\Phi_x$ má plnou hodnost.

(ii). Protože obraz diferenciálu $d\Phi_x$ je dvourozměrný lineární prostor, stačí ukázat, že $d\Phi_x(T_xS_1) \subset T_{\Phi(x)}S_2$. Buď $0 \neq v \in T_xS_1$. Pak existuje regulární parametrizovaná křivka c na ploše S_1 taková, že $c(t) = x$ a $c'(t) = v$ pro nějaký parametr t. Pak ale

$$d\Phi_x(v) = d\Phi_x(c'(t)) = (\Phi \circ c)'(t) \in T_{\Phi(x)}S_2$$

podle výše ukázaného vztahu. □

Definice 4.10. Lokální difeomorfismus $\Phi : S_1 \to S_2$ mezi dvěma plochami se nazývá:

- *lokální izometrie*, jestliže zachovává délku křivek (neboli délka libovolné křivky $c : I \to S_1$ na ploše S_1 je rovna délce jejího obrazu $\Phi \circ c(t) : I \to S_2$ na ploše S_2);
- *konformní*, jestliže zachovává úhly (neboli pro libovolné dvě křivky $c : I \to S_1$ a $d : J \to S_1$ na ploše S_1 protínající se v bodě $x = c(s) = d(t)$ pod úhlem α (tedy α je úhel tečných vektorů $c'(s)$ a $d'(t)$), jejich obrazy $\Phi \circ c : I \to S_2$ a $\Phi \circ d : J \to S_2$ se protínají v bodě $\Phi(x) = \Phi(c(s)) = \Phi(d(t))$ rovněž pod úhlem α);

- *zachovává velikosti ploch*, jestliže pro libovolnou měřitelnou oblast $W \subset S_1$, plošný obsah oblasti W je roven plošnému obsahu obrazu $\Phi(W)$.

Dvě plochy S_1, S_2 nazveme *izometrické*, jestliže existuje lokální izometrie S_1 na S_2, která je bijekcí.

Věta 4.12. *Mějme lokální difeomorfismus $\Phi : S_1 \to S_2$ mezi dvěma plochami. Je-li $f : U \to S_1$ mapa plochy S_1, pak $\tilde{f} := \Phi \circ f : U \to S_2$ je lokálně mapa plochy S_2 a platí:*

(i) *Φ je lokální izometrie právě tehdy, když pro každou mapu f plochy S_1, první fundamentální formy map f a $\tilde{f}$ splývají: $g = \tilde{g}$ na U.*
(ii) *Φ je konformní právě tehdy, když pro každou mapu f plochy S_1, první fundamentální formy map f a $\tilde{f}$ splňují: $g = \lambda\tilde{g}$ na U pro nějakou kladnou funkci λ na U.*
(ii) *Φ zachovává velikosti ploch právě tehdy, když pro každou mapu f plochy S_1, první fundamentální formy map f a $\tilde{f}$ splňují: $\det g = \det \tilde{g}$ na U.*

Pozn.: Podmínky v (i), (ii) a (iii) výše stačí ověřit pro mapy z nějakého atlasu plochy S_1.

Důkaz. Nechť je splněna podmínka v (i) a nechť $c = f \circ u$ je křivka na ploše S_1, jejíž obraz leží v části plochy pokryté mapou f. Pak podle věty 4.7 je délka křivky c shodná s délkou obrazu $\Phi \circ c$ na S_2. Z toho již zřejmě plyne, že Φ zachovává délky (všech) křivek, a tedy je izometrií.

Nechť naopak neplatí podmínka z (i) a nechť $f : U \to S_1$ je mapa a $u_0 \in U$ takový, že $g_{u_0} \neq \tilde{g}_{u_0}$. Je známo, že pozitivně definitní bilineární forma je jednoznačně určena svou kvadratickou formou, tedy musí existovat $\xi \neq 0$ v $\mathbb{R}^2$ takový, že $g_{u_0}(\xi, \xi) \neq \tilde{g}_{u_0}(\xi, \xi)$. Nechť například

$$g_{u_0}(\xi, \xi) < \tilde{g}_{u_0}(\xi, \xi).$$

Ze spojitosti g a $\tilde{g}$ musí existovat $\delta > 0$ takové, že

$$g_{u_0+t\xi}(\xi, \xi) < \tilde{g}_{u_0+t\xi}(\xi, \xi), \quad |t| < \delta,$$

a tedy také

$$\int_{-\delta}^{\delta} \sqrt{g_{u_0+t\xi}(\xi, \xi)}\, dt < \int_{-\delta}^{\delta} \sqrt{\tilde{g}_{u_0+t\xi}(\xi, \xi)}\, dt.$$

To ale podle věty 4.7 znamená, že délka regulární parametrizované křivky $c : t \mapsto f(u_0 + t\xi), \quad t \in (-\delta, \delta)$, je menší než délka jejího obrazu $\Phi \circ c$, a tedy Φ není izometrie.

Body (ii) a (iii) lze dokázat obdobně. □

Důsledek: Každá izometrie je konformní a zachovává velikosti ploch.
Příklady:

(1) Zobrazení $\Phi : (x, z) \mapsto (r \cos \frac{x}{r}, r \sin \frac{x}{r}, z)$ je lokální izometrie roviny $S_1 = \{y = 0\}$ na plášť válce $S_2 = \{x^2 + y^2 = r^2\}$.
(2) Existuje lokálně izometrické zobrazení části roviny na plášt kužele $\{x^2 + y^2 = az^2,\ z \neq 0\}$.
(3) Šroubová plocha s parametrizací

$$f_1(u^1, u^2) = (u^2 \cos u^1, u^2 \sin u^1, au^1), \quad (u^1, u^2) \in \mathbb{R}^2,$$

je izometrická katenoidu

$$f_2(v^1, v^2) = a(\cosh v^2 \cos v^1, \cosh v^2 \sin v^1, v^2), \quad (v^1, v^2) \in \mathbb{R}^2$$

(změna parametru $u^1 = v^1, u^2 = a \sinh v^2$).

(4) Stereografická projekce roviny $\{z = 0\}$ do sféry $\{x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ (bez "severního pólu") je konformní zobrazení. (Stereografická projekce je zobrazení Φ, které bodu $(u, v, 0)$ přiřadí průsečík sféry s přímkou procházející body $(u, v, 0)$ a $(0, 0, 1)$, tedy

$$\Phi : (u, v, 0) \mapsto \left(\frac{2u}{1 + u^2 + v^2}, \frac{2v}{1 + u^2 + v^2}, \frac{-1 + u^2 + v^2}{1 + u^2 + v^2} \right).)$$

4.5. **Normála a druhá fundamentální forma.**

Definice 4.11. (1) Soubor map, které pokrývají celou plochu S, nazveme *atlasem* plochy.

(2) Dvě mapy $f_1 : U_1 \to S$, $f_2 : U_2 \to S$ plochy S s $f_1(U_1) \cap f_2(U_2) \neq \emptyset$ nazveme *souhlasně orientované*, jestliže přechodové zobrazení $f_2^{-1} \circ f_1$ má kladný determinant matice parciálních derivací.

(3) Plochu S nazveme *orientovanou plochou*, jestliže existuje atlas, v němž každé dvě mapy s neprázdným průnikem obrazů jsou souhlasně orientované. Libovolný takový atlas určuje orientaci plochy.

Definice 4.12. Buď S orientovaná plocha a $x \in S$. Buď $f : U \to S$ libovolná mapa atlasu orientované plochy taková, že $x = f(u)$ pro nějaké $u \in U$, a položme

$$N(x) = \frac{f_{u^1}(u) \times f_{u^2}(u)}{\|f_{u^1}(u) \times f_{u^2}(u)\|}.$$

Jednotkový vektor $N(x) \perp T_xS$ se nazývá *normálový vektor plochy* v bodě x; nezávisí na volbě mapy f (viz poznámka níže), zobrazení $N : x \mapsto N(x)$ na orientované ploše S je tedy dobře definováno a nazývá se *Gaussovo zobrazení.*

Pozn.: Ukažme korektnost definice $N(x)$. Je-li $\tilde{f} : V \to f(U) \subset S$ jiná mapa, pak existuje diferencovatelné zobrazení (reparametrizace) $\phi : V \to U$ takové, že $\tilde{f} = f \circ \phi$, a tedy (značíme $\frac{\partial u^i}{\partial v^j}$ prvky matice diferenciálu $d\phi_v$)

$$\begin{aligned} \tilde{f}_{v^1} &= f_{u_1} \frac{\partial u^1}{\partial v^1} + f_{u_2} \frac{\partial u^2}{\partial v^1}, \\ \tilde{f}_{v^2} &= f_{u_1} \frac{\partial u^1}{\partial v^2} + f_{u_2} \frac{\partial u^2}{\partial v^2}, \end{aligned}$$

a tedy

$$\tilde{f}_{v^1} \times \tilde{f}_{v^2} = (f_{u_1} \times f_{u_2}) \left(\frac{\partial u^1}{\partial v^1} \frac{\partial u^2}{\partial v^2} - \frac{\partial u^1}{\partial v^2} \frac{\partial u^2}{\partial v^1} \right) = (f_{u_1} \times f_{u_2}) \det d\phi_v,$$

přitom $\det d\phi_v > 0$ podle předpokladu.

Lemma 4.13. *Gaussovo zobrazení je diferencovatelné a platí*

$$dN_x(T_xS) \subset T_xS.$$

Důkaz. Je-li $f : U \to S$ mapa a $x = f(u)$, pak složené zobrazení $n := N \circ f$ je diferencovatelné. Derivováním rovnosti $n(u) \cdot n(u) = 1$ dostaneme $dn_u(\xi) \cdot n(u) = 0$ pro všechna $\xi \in \mathbb{R}^2$, tedy $dn_u(\mathbb{R}^2) \subseteq T_xS$. Tvrzení pak plyne z toho, že $dN_x(T_xS) = dn_u(\mathbb{R}^2)$ (podle definice diferenciálu na ploše). $\square$

Definice 4.13. Buď S orientovaná plocha a $x \in S$.

(1) Lineární zobrazení $L_x = -dN_x : T_xS \to T_xS$ se nazývá *Weingartenovo zobrazení.*

(2) Bilineární forma $II_x(X,Y) = (L_xX)\cdot Y$ na T_xS se nazývá *druhá fundamentální forma plochy* v bodě x. Je-li $f : U \to S$ mapa taková, že $x = f(u)$ pro $u \in U$, a označíme-li $n = N \circ f$, pak vzor $II_x(\cdot,\cdot)$ při df_u značíme

$$h_u(\xi,\zeta) = II_u\big(df_u(\xi), df_u(\zeta)\big) = -dn_u(\xi)\cdot df_u(\zeta),$$

což je bilineární forma na $\mathbb{R}^2$ s maticí

$$h_u = \begin{pmatrix} -n_{u^1}\cdot f_{u^1}, & -n_{u^1}\cdot f_{u^2} \\ -n_{u^2}\cdot f_{u^1}, & -n_{u^2}\cdot f_{u^2} \end{pmatrix}.$$

Věta 4.14. *h_u, a tedy i II_x, je symetrická bilineární forma.*

Důkaz. Z rovnosti $f_{u^1}\cdot n = 0$ dostaneme $d\big(f_{u^1}\cdot n\big)_u(e_2) = 0$, tedy $d(f_{u^1})_u(e_2)\cdot n + f_{u^1}\cdot dn_u(e_2) = 0$, z čehož plyne

$$-f_{u^1}\cdot n_{u^2} = f_{u^1,u^2}\cdot n$$

(značíme $f_{u^i,u^j} = \frac{\partial^2 f}{\partial u^i \partial u^j}$). Podobně odvodíme i $-f_{u^2}\cdot n_{u^1} = f_{u^2,u^1}\cdot n$, a ze záměnnosti smíšených derivací plyne $-f_{u^2}\cdot n_{u^1} = -f_{u^1}\cdot n_{u^2}$. □

Pozn.: Z důkazu poslední věty je vidět, že matici druhé fundamentální formy lze vyjádřit ve tvaru

$$h_u = \begin{pmatrix} n\cdot f_{u^1,u^1}, & n\cdot f_{u^1,u^2} \\ n\cdot f_{u^1,u^2}, & n\cdot f_{u^2,u^2} \end{pmatrix}.$$

Pozn.: Druhou fundamentální formu h_u můžeme definovat i pro parametrizovanou plochu $f : U \to S$ a $u \in U$. Je-li $\phi : V \to U$ reparametrizace, pak pro 2.f.f. parametrizované plochy $\tilde{f} = f \circ \phi$ platí

$$\tilde{h}_v(\xi,\zeta) = h_{\phi(v)}\big(d\phi_v(\xi), d\phi_v(\zeta)\big), \quad \xi,\zeta \in \mathbb{R}^2, \quad v \in V.$$

Věta 4.15. *Buď S orientovaná plocha s atlasem $\mathcal{A}$ a $A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ shodnost. Pak $\bar{S} := A(S)$ je rovněž plocha a $\{A \circ f : f \in \mathcal{A}\}$ její atlas určující orientaci. Pro normálu $\bar{N}$ orientované plochy $\bar{S}$ platí*

$$\bar{N}(Ax) = \sigma A_0 N(x), \quad x \in S,$$

kde A_0 je lineární komponenta A a $\sigma = \det A_0$. Je-li $f : U \to S$ mapa z atlasu $\mathcal{A}$ a $\bar{f} := A \circ f$ příslušná mapa $\bar{S}$, pak příslušné druhé fundamentální formy a h, $\bar{h}$ splňují

$$\bar{h}_u = \sigma h_u.$$

Důkaz. Využijeme následující vlastnosti lineární shodnosti:

$$A_0u \times A_0v = \sigma A_0(u\times v), \quad u,v \in \mathbb{R}^3$$

(A_0 komutuje s vektorovým součinem až na změnu znaménka). V důsledku této vlastnosti je pak $\bar{n}(u) = \sigma A_0 n(u)$, a tedy

$$\begin{aligned} \bar{h}_u(\xi,\zeta) &= -d\bar{n}_u(\xi)\cdot d\bar{f}_u(\zeta) = -\sigma A_0(dn_u(\xi))\cdot A_0(df_u(\zeta)) \\ &= -\sigma dn_u(\xi)\cdot df_u(\zeta) = \sigma h_u(\xi,\zeta). \end{aligned}$$

□

Příklady:

(1) Buď $S = \{(x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2 = r^2\}$ sféra o poloměru $r > 0$. Pak je zřejmě $N(x) = \pm r^{-1}x$, tedy $L_u(X) = \pm r^{-1}X$ a

$$I\!I_x(X, Y) = \pm r^{-1}X \cdot Y$$

(znaménko závisí na orientaci sféry).

(2) Je-li $S\{(x^1)^2 + (x^2)^2 = r^2\}$ plášť válce, máme $N(x) = \pm r^{-1}\Pi(x)$, kde Π je kolmá projekce do roviny $\{x^3 = 0\}$. Platí tedy $L_x(X) = \pm r^{-1}\Pi(X)$ a

$$I\!I_x(X, Y) = \pm r^{-1}\Pi(X) \cdot Y.$$

4.6. **Hlavní směry a hlavní křivosti plochy.** Mezi křivostí křivky na ploše a druhou fundamentální formou plochy ve směru tečny křivky platí následující důležitý vztah.

Věta 4.16. *Buď S orientovaná plocha a $c : I \to S$ křivka na ploše S parametrizovaná obloukem. Symboly $\mathbf{t}(s), \kappa(s)$ značíme vektor tečny a křivost křivky, $\mathbf{n}(s)$ je vektor hlavní normály v případě $\kappa(s) \neq 0$ v bodě $s \in I$. Pak platí*

$$I\!I_{c(s)}(\mathbf{t}(s), \mathbf{t}(s)) = \kappa(s)\,(N(c(s)) \cdot \mathbf{n}(s)), \quad s \in I.$$

Pozn.: Je-li $\kappa(s) = 0$, výraz na pravé straně je roven nule a nevadí tedy, že vektor hlavní normály křivky není definován.

Důkaz. Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že existuje mapa $f : U \to S$ plochy taková, že $c(I) \subset f(U)$. Pak $u := f^{-1} \circ c : I \to U$ je regulární parametrizovaná křivka taková, že $c = f \circ u$ na I. Pro každé $s \in I$ platí

$$\begin{aligned} I\!I_{c(s)}(c'(s), c'(s)) &= h_{u(s)}(u'(s), u'(s)) \\ &= -dn_{u(s)}(u'(s)) \cdot df_{u(s)}(u'(s)) \\ &= -(n \circ u)'(s) \cdot c'(s) \\ &= (n \circ u)(s) \cdot c''(s) \\ &= \kappa(s)\, N(c(s)) \cdot \mathbf{n}(s), \end{aligned}$$

přitom čtvrtou rovnost dostaneme derivováním rovnosti $(n \circ u) \cdot c' = 0$, a poslední rovnost plyne z Frenetových vzorců. □

Důsledkem je vztah známý jako Meusnierova věta:

Věta 4.17 (Meusnier)**.** *Nechť S a c jsou jako v předchozí větě a označme $\theta(s) \in [0, \frac{\pi}{2}]$ úhel mezi normálou $N(c(s))$ k ploše a oskulační rovinou křivky c v bodě s. Pak*

$$|I\!I_{c(s)}(\mathbf{t}(s), \mathbf{t}(s))| = \kappa(s) \cos\theta(s), \quad s \in I.$$

Definice 4.14. S buď orientovaná plocha, $x \in S$, $0 \neq X \in T_xS$. Pak číslo

$$\kappa_n(X) = \frac{I\!I_x(X, X)}{I_x(X, X)}$$

nazveme *normálovou křivostí* plochy v bodě x a ve směru X.

Pozn.:

(1) Zřejmě platí $\kappa_n(\alpha X) = \kappa_n(X)$ pro každé $\alpha \neq 0$, κ_n je tedy skutečně funkcí 'směru' $\langle X \rangle = \{\alpha X : \alpha \in \mathbb{R}\}$.
(2) Z Meusnierovy věty plyne, že $|\kappa_n(X)|$ je křivost křivky ležící v řezu plochy rovinou $x + \langle X, N(x) \rangle$ v bodě x.

Zvolme $x \in S$ pevně a označme

$$T_x^1 S = \{X \in T_x S : \|X\| = 1\}.$$

Funkci κ_n můžeme přirozeně chápat jako funkci na $T_x^1 S$; jako spojitá funkce na kompaktu zde musí nabývat minima a maxima.

Definice 4.15. $X \in T_x^1 S$ (resp. αX pro $\alpha \neq 0$) je *hlavním směrem* plochy S v bodě x, jestliže κ_n nabývá extrému v X. Hodnota $\kappa_n(X)$ se pak nazývá *hlavní křivostí* plochy v bodě x.

Pozn.: X je hlavní směr, právě když $-X$ je hlavní směr.
Hledání hlavních směrů a hlavních křivostí: Jedná se o úlohu na vázaný extrém

$$\min / \max\{I\!I_x(X, X) : I_x(X, X) = 1\}.$$

Je-li $f : U \to S$ mapa plochy s $f(u) = x$, pak lze ekvivalentně úlohu převést na hledání extrému ($\xi \in \mathbb{R}^2$)

$$\min / \max\{h_u(\xi, \xi) : g_u(\xi, \xi) = 1\}.$$

Metodou Lagrangeových multiplikátorů se úloha převede na hledání nevázaného extrému funkce

$$\Lambda(\xi, \lambda) = h_u(\xi, \xi) - \lambda\big(g_u(\xi, \xi) - 1\big), \quad \xi \in \mathbb{R}^2, \lambda \in \mathbb{R}.$$

Funkce Λ je diferencovatelná, pokud tedy nabývá v (ξ, λ) extrému, musí platit

$$d\Lambda_{(\xi,\lambda)}(\eta, 0) = 2h_u(\xi, \eta) - 2\lambda g_u(\xi, \eta) = 0 \quad \text{pro všechna } \eta \in \mathbb{R}^2,$$

v maticovém zápisu

$$\eta^T(h_u - \lambda g_u)\xi = 0, \quad \eta \in \mathbb{R}^2.$$

Poslední podmínka nastane, právě když

$$(h_u - \lambda g_u)\xi = 0, \tag{2}$$

což může nastat jedině když

$$\det(h_u - \lambda g_u) = 0. \tag{3}$$

Všimněme si, že vektor ξ z (2) je hlavním směrem (resp. jeho obraz $df_u\xi$), a hodnota λ z (2) nebo (3) je hlavní křivostí.

Věta 4.18. *Jsou-li $\lambda_1 \neq \lambda_2$ dvě řešení (3) a ξ_1, ξ_2 odpovídající řešení (2), platí $g_u(\xi_1, \xi_2) = 0$ (neboli hlavní směry odpovídající různým hlavním křivostem jsou vzájemně kolmé). Hlavní směry $X_i = df_u(\xi_i)$ jsou vlastními vektory Weingartenova zobrazení L_x s vlastními čísly λ_i:*

$$L_x(X_i) = \lambda_i X_i, \quad i = 1, 2.$$

Hodnoty λ_i jsou extremálními hodnotami normálové křivosti ve směrech X_i.

Důkaz. Odečtením rovnic (důsledek (2))

$$\begin{aligned} \xi_2^T(h_u - \lambda_1 g_u)\xi_1 &= 0, \\ \xi_1^T(h_u - \lambda_2 g_u)\xi_2 &= 0. \end{aligned}$$

Z (2) dále odvodíme

$$II_x(X_i, Y) = \lambda_i I_x(X_i, Y), \quad Y \in T_x S,$$

z čehož plyne $L_x X_i = \lambda_i X_i$ a $\kappa_n(X_i, X_i) = \lambda_i$. □

Mohou nastat tyto případy:

(1) Rovnice (3) má jediné řešení λ_1, pak $\lambda_1 = \kappa_n(X)$ pro všechna $X \in \mathbb{S}_x S$ (každý směr je hlavním směrem):
  (a) $\lambda_1 = 0$, x je *planární bod* plochy,
  (b) $\lambda_1 \neq 0$, x je *kruhový bod* plochy.

(2) Rovnice (3) má dvě řešení $\lambda_1 < \lambda_2$, odpovídající hlavní směry X_1, X_2 ($X_i = df_u(\xi_i)$) jsou navzájem kolmé:
  (a) $\lambda_1\lambda_2 > 0$, x je *eliptický bod* plochy,
  (b) $\lambda_1\lambda_2 = 0$, x je *parabolický bod* plochy,
  (c) $\lambda_1\lambda_2 < 0$, x je *hyperbolický bod* plochy.

Definice 4.16. Funkce $K(x) = \lambda_1(x)\lambda_2(x)$ se nazývá *Gaussova křivost* a $H(x) = \frac{\lambda_1(x)+\lambda_2(x)}{2}$ *střední křivost* plochy. (Je-li jediná hlavní křivost, klademe $\lambda_2 = \lambda_1$.)

Věta 4.19. *Je-li $f : U \to S$ mapa a $f(u) = x$, pak*

$$K(x) = \frac{\det h_u}{\det g_u}, \tag{4}$$

$$H(x) = \frac{g_u^{11}h_u^{22} + g_u^{22}h_u^{11} - 2g_u^{12}h_u^{12}}{2\det g_u} \tag{5}$$

(g_u^{ij}, h_u^{ij} značí prvky matic g_u, h_u).

Důkaz: Vzorce se odvodí přímo z (3).
Důsledek: K, H jsou diferencovatelné funkce na ploše S.

Lemma 4.20. *Je-li $\lambda_1(x_0)) \neq \lambda_2(x_0)$, pak existuje okolí V bodu x_0 a funkce λ_1, λ_2 diferencovatelné na $S \cap V$ takové, že $\lambda_1(x), \lambda_2(x)$ jsou hlavní křivosti plochy v bodě x pro každý $x \in S \cap V$.*

Důkaz. Zvolme mapu $f : U \to S$ s $f(u_0) = x_0$. Aplikujeme větu o implicitních funkcích pro funkci

$$\Phi(\lambda, u) = \lambda^2 - 2H(f(u))\lambda + K(f(u)) = 0$$

v bodech $(\lambda_1(x_0), u_0)$ a $(\lambda_2(x_0), u_0)$ Podmínka $\lambda_1(u_0) \neq \lambda_2(u_0)$ zaručuje, že

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \lambda}(\lambda_i(x_0), u_0) = 2(\lambda_i(x_0) - H(f(u_0))) \neq 0, \quad i = 1, 2.$$

□

Věta 4.21. *Buď S orientovaná plocha a $A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ shodnost. Pak pro křivosti orientované plochy $\bar{S} = A(S)$ platí*

$$\bar{\lambda}_i(Ax) = \sigma\lambda_i(x), \quad \bar{K}(Ax) = K(x), \quad \bar{H}(Ax) = \sigma H(x), \quad x \in S, i = 1, 2,$$

kde $\sigma = \det A_0$ a A_0 je lineární složna A.

Důkaz. Vztah pro hlavní křivosti plyne z rovnice (3) s použitím Věty 4.15, vztahy pro Gaussovu a střední křivost jsou přímým důsledkem. □

Poznámka: Je-li f parametrizovaná plocha a $u_0 \in U$ pevný, lze vždy plochu $f(U)$ na okolí bodu u_0 parametrizovat jako graf funkce nad tečnou rovinou $T_{u_0}f$. Přesněji: Nechť (bez újmy na obecnosti) je $f(u_0) = 0$, $T_{u_0}f = \{z = 0\}$, $n(u_0) = e_3$. Pak existuje okolí U_0 bodu u_0, okolí V_0 počátku v rovině $\{z = 0\}$ a diferencovatelná funkce $\phi : V_0 \to \mathbb{R}$ taková, že $d\phi_0 = 0$ a graf $\phi = f(U_0)$ (použijte větu o implicitních funkcích). Proto následující tvrzení je dostatečně obecné.

Lemma 4.22. *Buď ϕ diferencovatelná funkce definovaná na okolí počátku v $\mathbb{R}^2$ s $\phi(0,0) = 0$ a $d\phi_{(0,0)} = 0$. Pak $f : u \mapsto (u, \phi(u))$ je parametrizovaná plocha, a označíme-li λ_1, λ_2 její hlavní křivosti v bodě $(0,0)$, a při volbě souřadnic x, y ve směru hlavních směrů X_1, X_2, platí*

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}(0,0) = \lambda_1, \ \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2}(0,0) = \lambda_2, \ \frac{\partial^2\phi}{\partial x \partial y}(0,0) = 0.$$

Tedy grafem Taylorova polynomu druhého řádu funkce ϕ v počátku je kvadrika $z = \frac{1}{2}(\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2)$, což je:

(1) *rovina v případě $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$,*
(2) *rotační paraboloid v případě $\lambda_1 = \lambda_2 \neq 0$,*
(3) *eliptický paraboloid v případě $\lambda_1\lambda_2 > 0$,*
(4) *parabolický válec v případě $\lambda_1 \neq \lambda_2$, $\lambda_1\lambda_2 = 0$,*
(5) *hyperbolický paraboloid v případě $\lambda_1\lambda_2 < 0$.*

Důkaz. Z definice druhé fundamentální formy a hlavních směrů a křivostí dostaneme $(i, j = 1, 2)$

$$d^2\phi_{(0,0)}(\xi_i, \xi_j) = d^2 f_{(0,0)}(\xi_i, \xi_j)\cdot n(0,0) = II_{(0,0)}(X_i, X_j) = L_{(0,0,0)}(X_i)\cdot X_j = \lambda_i(X_i \cdot X_j),$$

přitom $X_i \cdot X_j = \delta_{ij}$ a hlavní směry ξ_i, ξ_j splývají s vektory kanonické báze e_1, e_2. □

Definice 4.17. Buď S orientovaná plocha a $f : U \to S$ její mapa.

(1) Křivky $u \mapsto f(u, v)$ (v pevné) a $v \mapsto f(u, v)$ (u pevné) se nazývají *parametrické křivky* mapy f na ploše S.
(2) Regulární parametrizovaná křivka $c : I \to S$ na ploše S je *hlavní křivkou*, jestliže $c'(t)$ je hlavním směrem pro každé $t \in I$.
(3) Nenulový vektor $X \in T_xS$ je *asymptotickým směrem* na ploše S v bodě x, jestliže $II_x(X, X) = 0$.
(4) Regulární parametrizovaná křivka $c : I \to S$ na ploše S je *asymptotickou křivkou*, jestliže $c'(t)$ je asymptotickým směrem pro každé $t \in I$.

Věta 4.23. *Buď S plocha a $x \in S$.*

(1) *Je-li $K(x) > 0$, neexistuje v x žádný asymptotický směr.*
(2) *Je-li $K(x) < 0$, existují v x právě dva různé asymptotické směry.*
(3) *Je-li $K(x) = 0$ a $0 = \lambda_1(x) \neq \lambda_2(x)$, existuje v x právě jeden asymptotický směr, který je zároveň hlavním směrem.*
(4) *Je-li $K(x) = 0$ a $0 = \lambda_1(x) = \lambda_2(x)$, je v x každý směr asymptotický.*

Důkaz. Tvrzení plyne přímo z definic. Využívá faktu, že normálová křivost nabývá na jednotkové kružnici nejvýše dvou lokálních extrémů ve dvou na sebe kolmých směrech. □

Věta 4.24. *Buď $f : U \to S$ mapa plochy S. Regulární parametrizovaná křivka $c(t) = f(u(t), v(t))$, $t \in I$, na ploše S je (6) hlavní, (7) asymptotická, právě tehdy, když vyhovuje rovnici*

$$\det \begin{pmatrix} (v')^2 & -u'v' & (u')^2 \\ g^{11} & g^{12} & g^{22} \\ h^{11} & h^{12} & h^{22} \end{pmatrix} = 0, \tag{6}$$

$$h^{11}(u')^2 + 2h^{12}u'v' + h^{22}(v')^2 = 0. \tag{7}$$

Důkaz. Pro hlavní křivku využijeme rovnice (2), z níž plyne, že c je hlavní křivka právě tehdy, když pro každé t jsou vektory $g\xi$ a $h\xi$ lineárně závislé, kde $g = g_{u(t),v(t)}$ a $\xi = (u'(t), v'(t))^T$. Toto je dále ekvivalentní vztahu

$$0 = \det(g\xi, h\xi) = \det \begin{pmatrix} g^{11}u' + g^{12}v', & h^{11}u' + h^{12}v', \\ g^{12}u' + g^{22}v', & h^{12}u' + h^{22}v' \end{pmatrix}, \quad t \in I,$$

což je stejná rovnice, jako v (6). Ekvivalence pro asymptotickou křivku plyne přímo z definice. □

4.7. **Přímkové plochy.**

Definice 4.18. Parametrizovaná plocha $f : U \to \mathbb{R}^3$ se nazývá *přímková (parametrizovaná) plocha*, jestliže existuje regulární křivka $c : I \to \mathbb{R}^3$ a diferencovatelné zobrazení $X : I \to \mathbb{R}^3 \setminus \{o\}$ tak, že $U \subseteq I \times \mathbb{R}$ a

$$f(u, v) = c(u) + vX(u), \quad (u, v) \in U.$$

Je-li navíc $\frac{\partial n}{\partial v}(u, v) = 0$ na U (normálové pole je konstantní podél přímek na ploše), nazveme f *rozvinutelnou.*

Plochu $S \subseteq \mathbb{R}^3$ nazveme *přímkovou (rozvinutelnou) plochou*, jestliže existuje atlas tvořený přímkovými (rozvinutelnými) plochami.

Věta 4.25. *Buď $f(u, v) = c(u) + vX(u)$ přímková parametrizovaná plocha.*

(1) *$K(u, v) \leq 0$, $(u, v) \in U$.*
(2) *f je rozvinutelná, právě když $K(u, v) = 0$, $(u, v) \in U$.*

Důkaz:

(1) Zřejmě parciální derivace druhého řádu $f_{v^2} = 0$, tedy i příslušný koeficient matice druhé fundamentální formy je nulový: $h^{22} = n \cdot f_{v^2} = 0$. Pak ale $\det h = -(h^{12})^2 \leq 0$, a protože $K = \frac{\det h}{\det g}$ a $\det g > 0$, je poslední podmínka ekvivalentní tomu, že $K \leq 0$ na U.
(2) Protože $n_v \cdot f_v = -h^{22} = 0$ (podle důkazu první části), platí

$$n_v = 0 \iff n_v \cdot f_u = 0 \iff h^{12} = 0 \iff K = 0.$$

Příklady:

(1) Zobecněná válcová plocha

$$f(u, v) = c(u) + v^2 X$$

je rozvinutelná parametrizovaná plocha.
(2) Zobecněná kuželová plocha

$$f(u, v) = vc(u)$$

je rozvinutelná parametrizovaná plocha.

(3) Plocha tečen obecné regulární parametrizované křivky

$$f(u,v) = c(u) + vc'(u)$$

je rozvinutelná parametrizovaná plocha.

(4) Šroubová plocha

$$f(u,v) = \big(v\cos u, v\sin u, au\big)^T \quad (a > 0)$$

je přímková parametrizovaná plocha, která není rozvinutelná.

(5) Jednodílný hyperboloid $x^2+y^2-z^2 = 1$ je přímková plocha (parametrizace $f(u,v) = \big(\cos v - u\sin v, \sin v + u\cos v, u\big)^T$).

4.8. **Geodetiky na ploše.**
Motivace. Mějme orientovanou plochu S a regulární parametrizovanou křivku $c : I \to S$ na ploše S. Hledáme podmínky zaručující, že křivka c spojuje nejkratším možným způsobem libovolné své dva různé dostatečně blízké body. Pozměníme málo křivku c na okolí nějakého bodu $x = c(t)$ výchylkou ve směru tečném k ploše a kolmém k tečně křivky:

$$c_\varepsilon(t) = c(t) + \varepsilon\alpha(t)(c'(t) \times N(c(t))),$$

kde $N(t) = n(u(t))$, $\varepsilon > 0$ malé a $\alpha(t)$ je libovolná nezáporná diferencovatelná funkce. Délka části křivky c_ε je $\int_I \|c'_\varepsilon\|$. Chceme, aby tato délka byla minimální pro $\varepsilon = 0$ při libovolné volbě funkce α, což znamená podmínku

$$\frac{d}{d\varepsilon}\|c'_\varepsilon\|\Big|_{\varepsilon=0} = 0,$$

$\alpha \geq 0$ libovolná. Máme

$$c'_\varepsilon = c' + \varepsilon\alpha'(c' \times (N \circ c)) + \varepsilon\alpha(c'' \times (N \circ c)) + \varepsilon\alpha(c' \times (N \circ c)'),$$

tedy

$$\begin{aligned}
\frac{d}{d\varepsilon}\|c'_\varepsilon\|\Big|_{\varepsilon=0} &= \frac{c' \cdot \Big(\alpha'(c' \times (N \circ c)) + \alpha(c'' \times (N \circ c)) + \alpha(c' \times (N \circ c)')\Big)}{\|c'\|} \\
&= \frac{\alpha}{\|c'\|}\det(c', c'', N \circ c).
\end{aligned}$$

Poslední výraz je roven 0 pro libovolnou α, právě když jsou vektory $c', c'', N \circ c$ lineárně závislé.

Definice 4.19. Regulární křivka $c : I \to S$ na ploše S se nazývá *geodetikou*, jestliže

$$\det(c'(t), c''(t), N(c(t))) = 0 \text{ pro každé } t \in I.$$

Pozn.: Vlastnost křivky ‘být geodetikou na ploše’ je zřejmě invariantní vůči změně parametru křivky.
Příklady.

(1) V rovině jsou geodetiky právě všechny přímky. Část přímky je geodetikou na libovolné ploše.

(2) Na sféře $\{x^2+y^2+z^2 = r^2\}$ jsou geodetiky (právě) všechny hlavní kružnice, tj. kružnice maximálního poloměru r.

(3) Na válcové ploše $\{x^2 + y^2 = 1\}$ parametrizované mapou
$$f(u, v) = (\cos u, \sin u, v)^T$$
jsou geodetiky ‘spirály’ parametrizované např. $u = \alpha_1 t + \beta_1$, $v = \alpha_2 t + \beta_2$, $\alpha_1^2 + \alpha_2^2 > 0$ (tyto křivky odpovídají přímkám po ‘rozbalení’ plochy do roviny).

Definice 4.20. Buď S orientovaná plocha a $c : I \to S$ regulární křivka na ploše S. *Geodetickou křivost* křivky c definujeme předpisem
$$\kappa_g(t) = \frac{\det\Big(c'(t), c''(t), N(c(t))\Big)}{\|c'(t)\|^3}, \quad t \in I.$$

Poznámky:

(1) Není těžké ověřit, že absolutní hodnota geodetické křivosti nezávisí na parametrizaci křivky. Znaménko geodetické křivosti lze změnit změnou orientace jak křivky, tak plochy.
(2) Z definice je zřejmé, že křivka c je geodetikou, právě když její geodetická křivost je nulová.

Věta 4.26. *Pro křivku $c : I \to S$ na ploše S platí*
$$|\kappa_g(t)| = \kappa(t) \sin\theta(t), \quad t \in I,$$
kde $\kappa(t)$ je křivost křivky c v $\mathbb{R}^3$ a $\theta(t) \in [0, \pi/2]$ je úhel mezi normálou plochy a oskulační rovinou křivky v neinflexním bodě t křivky.

Důkaz. Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že křivka je parametrizovaná obloukem. Z definice geodetické křivosti a z Frenetových vzorců pro křivku dostaneme
$$\begin{aligned} |\kappa_g(s)| &= |\det(c'(s), c''(s), N(c(s)))| \\ &= |\det(\mathbf{t}(s), \mathbf{t}'(s), N(c(s)))| \\ &= \kappa(s)|\det(\mathbf{t}(s), \mathbf{n}(s), N(c(s)))| \\ &= \kappa(s)|\mathbf{b}(s) \cdot N(c(s))| \\ &= \kappa(s)\sin\theta(s). \end{aligned}$$
□

Využijeme-li Meusnierovu větu (Důsledek 4.17) a nezávislost křivostí na parametrizaci, dostáváme

Důsledek 4.27. *Pro regulární křivku $c : I \to S$ na ploše S platí následující vztah mezi obyčejnou a geodetickou křivostí křivky a normálovou křivostí plochy:*
$$\kappa^2(t) = \kappa_n^2(c'(t)) + \kappa_g^2(t), \quad t \in I.$$

Na závěr uvedeme ještě větu o existenci geodetik zadaných vlastností. K důkazu, který neuvádíme, je třeba použít věty o řešení soustav parciálních diferenciálních rovnic.

Věta 4.28. *Buď S plocha, $x \in S$.*

(1) *Ke každému vektoru $o \neq X \in T_xS$ existuje (až na změnu parametru) právě jedna geodetika $c : I \to S$ taková, že $c(0) = x$ a $c'(0) = X$.*

(2) *Existuje okolí* V_0 *bodu* x *tak, že každá geodetika* $c : I \to S$ *na ploše* S *s* $c(I) \subseteq V_0$ *je nejkratší spojnicí na ploše libovolných dvou svých bodů (jinými slovy, délka libovolné křivky na ploše spojující dva body* $c(a), c(b)$*,* $a, b \in I$*, je větší nebo rovna délce geodetiky* $c \mid [a, b]$ *a rovnost nastává pouze v případě, kdy obrazy obou křivek splývají).*

Poznámka: Tvrzení 2. skutečně platí jen lokálně: z příkladu válcové plochy je zřejmé, že libovolné dva její body, které neleží na společné 'rovnoběžce' (kružnici kolmé k ose válce), lze spojit nekonečně mnoha geodetickými křivkami ('spirálami') libovolně velké délky.

4.9. **Minimální plochy.** Klasická úloha diferenciální geometrie spočívá v hledání plochy se zadanou hranicí a minimálním plošným obsahem (Plateauův problém). Hranicí zde myslíme jednoduchou uzavřenou křivku v $\mathbb{R}^3$ (naše definice nepřipouští plochy s hranicí, museli bychom tedy uvažovat plochy "přesahující" i přes danou hranici).

Buď $S = f(U)$ plocha s jedinou mapou f, $n(u) = N(f(u))$ normála plochy, $\alpha : U \to \mathbb{R}$ diferencovatelná funkce a pro $\varepsilon > 0$ označme

$$f^\varepsilon(u) := f(u) + \varepsilon\alpha(u)n(u), \quad u \in U.$$

Chceme-li, aby plocha f minimalizovala plošný obsah, musí pro funkci

$$\varphi(\varepsilon) := \int_U \sqrt{\det(g^\varepsilon)_u}\, du$$

(plošný obsah plochy f^ε) platit $\varphi'(0) = 0$. Výpočtem snadno zjistíme, že první fundamentální forma plochy f^ε splňuje

$$(g^\varepsilon)_u = g_u - 2\varepsilon\alpha(u)h_u + o(\varepsilon),$$

kde g_u, h_u jsou první a druhá fundamentální forma plochy f. Dále je

$$\frac{d}{d\varepsilon}\det g^\varepsilon\Big|_{\varepsilon=0} = -2\alpha\left(g^{11}h^{22} + g^{22}h^{11} - 2g^{12}h^{12}\right) =: -2\alpha w,$$

tedy (jsou-li splněny předpoklady pro záměnu integrálu a derivace)

$$\varphi'(0) = -\int_U \alpha(u)\frac{w(u)}{\sqrt{\det g_u}}\, du.$$

Poslední výraz je roven nule pro libovolnou diferencovatelnou funkci α právě tehdy, když $w = 0$ na U, a protože $H(u) = \frac{w(u)}{2\det g_u}$, je tato podmínka ekvivaletní nulovosti střední křivosti plochy.

Definice 4.21. Řekneme, že orientovaná plocha S je *minimální*, jestliže $H(x) = 0$, $x \in S$.

Příklady minimálních ploch. (i) rovina, (ii) šroubová plocha, (iii) katenoid.

5. Riemannova geometrie, hyperbolická geometrie

Dosud jsme studovali plochy v $\mathbb{R}^3$, jejichž geometrie byla dána polohou v trojrozměrném prostoru. Metrické vlastnosti plochy vyplývaly z první fundamentální formy, která je dána jako restrikce euklidovského skalárního součinu do tečné roviny v daném bodě.

Riemannova geometrie je zobecněním v tom smyslu, že první fundamentální formu v bodě definujeme předpisem, bez ohledu na vnoření plochy do většího prostoru. V této kapitole budeme nadále vycházet z množiny bodů tvořící plochu v $\mathbb{R}^3$, i když obecný přístup připouští mnohem obecnější struktury.

Definice 5.1. Nechť S je plocha v $\mathbb{R}^3$. *Riemannovou metrikou* na S rozumíme zobrazení

$$g : x \mapsto g_x, \quad x \in S,$$

kde g_x je symetrická pozitivně definitní bilineární forma na tečném prostoru T_xS, které je navíc hladké v tom smyslu, že pro každou mapu $f : U \to S$ plochy S je zobrazení

$$u \mapsto g_{f(u)}(df_u(\cdot), df_u(\cdot)), \quad u \in U,$$

diferencovatelným zobrazením z U do množiny pozitivně definitiních bilineárních forem na $\mathbb{R}^2$. Dvojici (S, g) nazveme *Riemannovou plochou.*

Definice i věty z podkapitol 4.3 a 4.4 lze aplikovat i pro případ plochy s Riemannovou geometrií. Konkrétně definujeme *úhel* dvou tečných vektorů $X, Y \in T_xS$ na Riemannově ploše (S, g) jako úhel $\alpha \in [0, \pi]$ splňující

$$\cos\alpha = \frac{g_x(X, Y)}{\sqrt{g_x(X, X)}\sqrt{g_x(Y, Y)}},$$

a *délku křivky* $c : I \to S$ na Riemannově ploše jako

$$\ell(c) = \int_I \sqrt{g_x(c'(t), c'(t)}\, dt.$$

Stejně jako u ploch řekneme, že diferencovatelné zobrazení

$$\Phi : (S_1, g_1) \to (S_2, g_2)$$

je *lokální izometrie* (*konformní*), jestliže zachovává délku křivek (úhly). Následující charakterizace má prakticky stejný důkaz jako Věta 4.12.

Věta 5.1. *Buď* $\Phi : (S_1, g_1) \to (S_2, g_2)$ *diferencovatelné zpobrazení mezi dvěma Riemannovými plochami.*

(1) Φ *je lokální izometrie právě tehdy, když pro všechny body* $x \in S_1$ *platí*

$$(g_1)_x(X, Y) = (g_2)_{\Phi(x)}(d\Phi_x(X), d\Phi_x(Y)), \quad X, Y \in T_xS_1.$$

(2) Φ *je konformní právě tehdy, když pro všechny body* $x \in S_1$ *existuje* $c(x) > 0$ *takové, že platí*

$$(g_1)_x(X, Y) = c(x)(g_2)_{\Phi(x)}(d\Phi_x(X), d\Phi_x(Y)), \quad X, Y \in T_xS_1.$$

Definice 5.2. Na ploše

$$H_2 := \{-x^2 - y^2 + z^2 = 1,\ z > 0\}$$

(horní list dvoudílného hyperboloidu) je dána Riemannova metrika

$$\begin{aligned} g^{(H_2)}_{(x,y,z)}((X_1, Y_1, Z_1), (X_2, Y_2, Z_2)) \quad &= \quad X_1X_2 + Y_1Y_2 - Z_1Z_2, \\ &\qquad (X_i, Y_i, Z_i) \in T_{(x,y,z)}H_2,\ i = 1, 2. \end{aligned}$$

Cvičení: Ověřte, že $g^{(H_2)}_{(x,y,z)}$ je pozitivně definitní bilineární forma na $T_{(x,y,z)}H_2$ pro každý bod $(x,y,z)\in H_2$.

Definici plochy v $\mathbb{R}^3$ vyhovuje i otevřená podmnožina $\mathbb{R}^2$, jak tomu bude v následujících dvou příkladech.

Definice 5.3. Množina

$$U=\{(u,v)\in\mathbb{R}^2:\, u^2+v^2<1\}$$

s Riemannovou metrikou

$$g^{(U)}_{(u,v)}=\begin{pmatrix}4(1-u^2-v^2)^{-2} & 0\\ 0 & 4(1-u^2-v^2)^{-2}\end{pmatrix}$$

(bilineární forma na $\mathbb{R}^2$ je reprezentována maticí) se nazývá *Poincarého model hyperbolické geometrie.*

Věta 5.2. *Zobrazení $\Phi : U\to H_2$ dané předpisem*

$$\Phi : (u,v)\mapsto\left(\frac{2u}{1-u^2-v^2},\frac{2v}{1-u^2-v^2},\frac{1+u^2+v^2}{1-u^2-v^2}\right)$$

je izometrické zobrazení U na H_2 (vzhledem k příslušným Riemannovým geometriím).

Pozn.: Zobrazení Φ je stereografická projekce z bodu $(0,0,-1)$, tedy trojice bodů $(0,0,-1)$, $(u,v,0)$ a $\Phi(u,v)\in H_2$ leží na přímce.

Důkaz. Zobrazení Φ je na H_2 a lze považovat za mapu plochy H_2. Parciální derivace jsou

$$\begin{aligned}\Phi_u &= \frac{2}{(1-u^2-v^2)^2}(1+u^2-v^2,2uv,2u),\\ \Phi_v &= \frac{2}{(1-u^2-v^2)^2}(2uv,1-u^2+v^2,2v),\end{aligned}$$

a první fundamentální forma plochy H_2 (s její Riemannovou metrikou) vyjádřená vzhledem k této mapě vyjde

$$g^{(H_2)}_{(u,v)}=\begin{pmatrix}g^{(H_2)}(\Phi_u,\Phi_u) & g^{(H_2)}(\Phi_u,\Phi_v)\\ g^{(H_2)}(\Phi_u,\Phi_v) & g^{(H_2)}(\Phi_v,\Phi_v)\end{pmatrix}=\frac{4}{(1-u^2-v^2)^2}\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}=g^{(U)}_{(u,v)},$$

tedy první fundamentální formy jsou shodné a Φ je izometrie. □

Komplexní funkce komplexní proměnné

$$\Psi : z\mapsto\frac{z-i}{z+i}$$

zobrazuje "horní polorovinu"

$$H_+ := \{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\, y>0\}$$

na jednotkový kruh U. Najdeme Riemannovu metriku na H_+ tak, aby Ψ bylo izometrií. Na Ψ můžeme nahlížet buď jako na funkci jedné komplexní proměnné $z=x+iy$, nebo jako na funkci dvou proměnných x,y. Protože Ψ má derivaci v komplexní proměnné, $\Psi'(z)=2i/(z+i)^2$, platí Cauchy-Riemannův vztah

$$\Psi_x(x+iy)=(-i)\Psi_y(x+iy),$$

tedy vektory parciálních derivací Ψ_x, Ψ_y jsou stejně velké a vzájemně kolmé. Máme tedy

$$g^{(U)}_{\Psi(z)}(\Psi_x(z), \Psi_y(z)) = 0$$

a

$$\begin{aligned} g^{(U)}_{\Psi(z)}(\Psi_x(z), \Psi_x(z)) = g^{(U)}_{\Psi(z)}(\Psi_y(z), \Psi_y(z)) &= \frac{4}{(1-|\Psi(z)|^2)^2}|\Psi'(z)|^2 \\ &= \frac{4}{\left(1-\left|\frac{z-i}{z+i}\right|^2\right)^2}\left|\frac{2i}{(z+i)^2}\right|^2 \\ &= y^{-2}. \end{aligned}$$

Definice 5.4. Polorovina H_+ s Riemannovou metrikou

$$g^{(H_+)}_{x,y} = \begin{pmatrix} y^{-2} & 0 \\ 0 & y^{-2} \end{pmatrix}$$

se nazývá *polorovinový model hyperbolické geometrie.*

Z výše uvedených výpočtů pak plyne

Věta 5.3. *Zobrazení Ψ je izometrií H_+ na U.*

Výše uvedené tři Riemannovy geometrie jsou tedy vlastně tři různé modely jedné a téže geometrie, nazávané *hyperbolická geometrie.* Umíme v těchto modelech měřit délku křivek, úhel křivek nebo velikost plošného obsahu. V následující kapitole uvidíme, jak lze v Riemannově geometrii definovat Gaussovu křivost a co jsou zde geodetiky (ty jsme si na plochách v $\mathbb{R}^3$ definovali pomocí normály, kterou zde nemáme k dispozici). Nicméně už nyní můžeme najít geodetiky jako křivky, které spojují body nejkratším způsobem. K tomu využijeme následující věty.

Věta 5.4. *Zobrazení tvaru*

$$\phi : z \mapsto \frac{az+b}{cz+d}, \quad a,b,c,d \in \mathbb{R},\ ad-bc=1, \tag{8}$$

jsou izometrie H_+ na H_+.

Důkaz. Opět využijeme derivování podle komplexní proměnné. Platí

$$\phi'(z) = (cz+d)^{-2} \text{ a } \mathfrak{Im}\,\phi(z) = y|cz+d|^{-2},$$

tedy podobně jako pro zobrazení Ψ výše dostaneme $g^{(H_+)}_{\phi(z)}(\phi_x, \phi_y) = 0$ a

$$g^{(H_+)}_{\phi(z)}(\phi_x, \phi_x) = g^{(H_+)}_{\phi(z)}(\phi_y, \phi_y) = (\mathfrak{Im}\,\phi(z))^{-2}|\phi'(z)|^2 = y^{-2},$$

ϕ je tedy skutečně izometrie. □

Tvrzení 5.5. *Pro $x \in \mathbb{R}$ a $0 < y_1 < y_2$ je úsečka*

$$t \mapsto (x,t), \quad y_1 < t < y_2,$$

nejkratší spojnicí bodů (x,y_1) a (x,y_2) v hyperbolickém modelu H_+.

Důkaz. Buď $c(s) = (x(s), y(s))$, $s \in (a, b)$, křivka v H_+ parametrizovaná obloukem a taková, že $x(a) = x(b) = x$ a $y(a) = y_1$, $y(b) = y_2$. Předpokládejme, že $y'(s) > 0$, $s \in (a, b)$. Pro délku křivky c (s využitím substituce $y = y(s)$) dostaneme

$$L(c) = \int_a^b \frac{1}{y(s)}\, ds = \int_{y_1}^{y_2} \frac{1}{y} \frac{dy}{y'(s)} \geq \int_{y_1}^{y_2} \frac{1}{y}\, dy,$$

neboť zřejmě $y'(s) \leq 1$. Poslední výraz je délka úsečky $t \mapsto (x, t)$, $y_1 < t < y_2$, délka úsečky c je tedy větší nebo rovna. Neplatí-li předpoklad $y' > 0$, rozdělíme úsečku na úseky s rostoucí či klesající y-ovou souřadnicí a jednoduchou úvahou usoudíme, že délka křivky nemůže být menší. □

Tvrzení 5.6. *Izometrie* (8) *zobrazují polopřímku* $x = 0, y > 0$ *na polopřímky* $x = x_0, y > 0$*, nebo na půlkružnice se středem na ose* x*.*

Návod k důkazu: Je-li $c = 0$ nebo $d = 0$, obrazem polořímky $x = 0, y > 0$ bude polopřímka posunutá ve směru osy x. Je-li $c \neq 0$ a $d \neq 0$, lze přímým výpočtem ukázat, že

$$\left| \frac{ayi + b}{cyi + d} - p \right|^2 = r^2$$

pro $p = (ad + bc)/(2cd)$ a $r = 1/(2|cd|)$, tedy obrazem polopřímky $x = 0, y > 0$ je půlkružnice se středem p (ležícím na ose x) a poloměrem r. □

Důsledek 5.7. *Polopřímky rovnoběžné s osou* y *a půlkružnice se středem na ose* x *jsou nejkratšími spojnicemi svých bodů.*

Pozn.: Výše uvedeným křivkám (které jsou geodetikami ve smyslu definice z následující kapitoly) odpovídají v modelu U kružnice protínající hraniční kružnici U pod pravým úhlem, v modelu H_2 řezy s rovinami procházejícími počátkem.

6. Vnitřní vlastnosti plochy, Gaussova věta a rovnice pro geodetické křivky

Buď $S \subset \mathbb{R}^3$ orientovaná plocha. Jejími *vnitřními vlastnostmi* rozumíme vlastnosti dané její první fundamentální formou. Všechny vnitřní vlastnosti se tedy zachovávají při izometrickém zobrazení a lze je přenést i do kontextu Riemannovy geometrie. Ne všechny charakteristiky plochy jsou však vnitřní, například Gaussovo zobrazení $x \mapsto N(x)$ není dáno první fundamentální formou.

V celé kapitole bude dána mapa plochy S, $f : U \to \mathbb{R}^3$. Budeme používat úsporné značení parciálních derivací pomocí dolních indexů, tedy např. $f_i = f_{u^i} = \frac{\partial f}{\partial u^i}$, $f_{ij} = f_{u^i,u^j} = \frac{\partial^2 f}{\partial u^i \partial u^j}$, $n_i = n_{u^i} = \frac{\partial n}{\partial u^i}$, $i, j = 1, 2$, a tak podobně. Podobně jako dříve budeme značit g^{ij}, h^{ij} koeficienty matic první a druhé fundamentální formy g, h a a^{ij} budou koeficienty inverzní matice $a = g^{-1}$, $i, j = 1, 2$.

Pro každé $u \in U$ tvoří vektory f_1, f_2, n bázi (obecně ne ortogonální) prostoru $\mathbb{R}^3$. Najdeme koeficienty vektorů n_i a f_{ij} vůči této bázi.

Lemma 6.1. *Pro* $i, j = 1, 2$ *platí*

$$n_i = -\sum_k \sum_l h^{il} a^{lk} f_k, \tag{9}$$

$$f_{ij} = \sum_k \Gamma_{ij}^k f_k + h^{ij} n, \tag{10}$$

kde

$$\Gamma_{ij}^k = \sum_l a^{kl}(f_{ij}\cdot f_l) \tag{11}$$

$$= \frac{1}{2}\sum_l a^{kl}\big(g_j^{il}+g_i^{jl}-g_l^{ij}\big) \tag{12}$$

(zde opět značíme $g_l^{ij}=\frac{\partial g^{ij}}{\partial u^l}$*). Koeficienty* Γ_{ij}^k *se nazývají* Christoffelovy symboly.

Důkaz. Rovnosti (9,10) se ověří skalárním násobením obou stran vektory f_1, f_2, n. Rovnost výrazů (11) a (12) ověříme dosazením za derivace g_k^{ij}. □

Podle předpokladu je f diferencovatelné zobrazení, má tedy záměnné smíšené parciální derivace třetího řádu

$$f_{ijk}=f_{ikj}, \quad i,j,k=1,2.$$

Upravíme-li tento vztah s využitím (10), dostaneme

$$\sum_l\Big(\Gamma_{ij,k}^l f_l+\Gamma_{ij}^l f_{lk}\Big)+h_k^{ij}n+h^{ij}n_k=\sum_l\Big(\Gamma_{ik,j}^l f_l+\Gamma_{ik}^l f_{lj}\Big)+h_j^{ik}n+h^{ik}n_j.$$

Dosadíme-li opět podle (10) a (9) dostaneme

$$\begin{aligned}0 &= \sum_l\Big(\Gamma_{ij,k}^l-\Gamma_{ik,j}^l\Big)f_l+\big(h_k^{ij}-h_j^{ik}\big)n\\ &+ \sum_l\Gamma_{ij}^l\Big(\sum_m\Gamma_{lk}^m f_m+h^{lk}n\Big)-\sum_l\Gamma_{ik}^l\Big(\sum_m\Gamma_{lj}^m f_m+h^{lj}n\Big)\\ &- h^{ij}\sum_l\sum_m h^{kl}a^{lm}f_m+h^{ik}\sum_l\sum_m h^{jl}a^{lm}f_m.\end{aligned}$$

Porovnáním koeficientů u f_m a n dostaneme následující rovnice.

Věta 6.2. *Pro* $i,j,k,m=1,2$ *platí vztahy*

$$\Gamma_{ij,k}^m-\Gamma_{ik,j}^m+\sum_l\Big(\Gamma_{ij}^l\Gamma_{lk}^m-\Gamma_{ik}^l\Gamma_{lj}^m\Big)=\sum_l a^{lm}\big(h^{ij}h^{kl}-h^{ik}h^{jl}\big) \tag{13}$$

(Gaussova rovnice) a

$$\sum_l\Big(\Gamma_{ij}^l h^{lk}-\Gamma_{ik}^l h^{lj}\Big)+h_k^{ij}-h_j^{ik}=0 \tag{14}$$

(Codazzi-Mainardiho rovnice).

Nyní můžeme vyslovit větu o existenci plochy se zadanými funkcemi první a druhé fundamentální formy (analogie Věty 2.10).

Věta 6.3 (Bonnet)**.** *Buď* $U\subseteq\mathbb{R}^2$ *otevřená množina a* g,h *symetrické maticové* (2×2) *funkce diferencovatelné na* U *takové, že* g *je pozitivně definitní a jsou splněny rovnice* (13), (14) *na* U*. Pak existuje parametrizovaná plocha* $f:U\to\mathbb{R}^3$ *s maticemi první a druhé fundamentální formy* g,h*. Je-li navíc* U *souvislá, je tato plocha určena jednoznačně až na shodnost.*

(Bez důkazu.)

Dosadíme-li do pravé strany Gaussovy rovnice (13) hodnoty $i = j = 1$ a $k = m = 2$, dostaneme

$$\sum_l a^{l2}\big(h^{11}h^{2l} - h^{12}h^{1l}\big) = a^{22}\det h = g^{11}\frac{\det h}{\det g} = g^{11}K,$$

kde K je Gaussova křivost plochy v daném bodě (viz Věta 4.19). Jako důsledek tohoto pozorování dostáváme slavnou Gaussovu větu.

Věta 6.4 (Theorema Egregium)**.** *Pro Gaussovu křivost parametrizované plochy platí*

$$K = (g^{11})^{-1}\left(\Gamma^2_{11,2} - \Gamma^2_{12,1} + \sum_l \left(\Gamma^l_{11}\Gamma^2_{l2} - \Gamma^l_{12}\Gamma^2_{l1}\right)\right).$$

Speciálně tedy Gaussova křivost je funkcí první fundamentální formy, čili je vnitřní vlastností plochy.

Poznámka ke zkoušce: Znění Gaussových rovnic ani Godazzi-Mainardiho rovnic se nemusíte učit nazpaměť. Stačí vědět, jak se odvodí.

Důsledek 6.5. *Izometrické parametrizované plochy mají v odpovídajících bodech stejnou Gaussovu křivost.*

V případě nulové křivosti platí i obrácená implikace:

Věta 6.6. *Buď $S \subset \mathbb{R}^3$ plocha, jejíž Gaussova křivost je identicky rovna* 0 *na S. Pak ke každému $x \in S$ existuje okolí V tak, že restrikce $S \cap V$ je izometrická části roviny (neboli S je 'lokálně izometrická' rovině).*

(bez důkazu)

Poznámky.

(1) Z předchozí věty plyne, že každá rozvinutelná plocha je lokálně izometrická rovině.
(2) Plochy

$$\begin{aligned} f(u,v) &= (u\cos v, u\sin v, \ln u)^T, \\ \tilde f(u,v) &= (u\cos v, u\sin v, v)^T, \quad u > 0, v \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

mají shodnou Gaussovu křivost, ale nejsou izometrické. Věta 6.6 tedy neplatí obecně bez předpokladu nulové Gaussovy křivosti.
(3) Vzorcem z věty 6.4 lze definovat Gaussovu křivost jen pomocí první fundamentální formy, tedy i v Riemannově geometrii. Lze spočítat, že v hyperbolické geometrii z předpochozí kapitoly je Gaussova křivest identicky rovna -1 (samozřejmě ve všech třech modelech, neboť jsou izometrické).

6.1. **Rovnice pro geodetické křivky.**

Definice 6.1. Buď $c : I \to S$ regulární křivka na ploše $S \subset \mathbb{R}^3$ a $X : I \to \mathbb{R}^3$ diferencovatelné zobrazení (vektorové pole podél křivky c). *Kovariantní derivací* vektorového pole X podél křivky c nazveme zobrazení

$$\frac{\nabla X}{dt} : t \mapsto \Pi_x(X'(t)),\ t \in I,$$

kde Π_x je operátor kolmé projekce $\mathbb{R}^3$ do tečného prostoru T_xS.

Definice 6.2. Řekneme, že regulární křivka $c : I \to S$ na ploše S je *parametrizovaná geodetika*, platí-li $\frac{\nabla c'}{dt}(t) = 0$, $t \in I$.

Lemma 6.7. *Buď $c : I \to S$ regulární křivka na ploše S. Je ekvivalentní:*

(1) *c je parametrizovaná geodetika,*
(2) *vektor $c''(t)$ je násobkem normálového vektoru plochy $N(c(t))$ pro každé $t \in I$,*
(3) *c je geodetika a její parametrizace splňuje $\|c'(t)\| = \text{konst}$.*

Důkaz. Ekvivalence prvních dvou podmínek plyne přímo z definice parametrizované geodetiky. Dále je zřejmé, že z (2) plyne, že c je geodetika. Pro geodetiku je však ekvivalentní

$$c''(t) \perp T_{c(t)}S \iff c' \cdot c'' = 0 \iff \|c'(t)\|' = \frac{c' \cdot c''}{\|c'\|} = 0 \iff \|c'\| = \text{konst.},$$

z čehož plyne ekvivalence druhé a třetí podmínky.
Rovnice pro parametrizované geodetiky. Buď $c = f \circ u$ regulární křivka na části plochy pokryté mapou f. Derivováním rovnosti

$$c' = (u^1)' f_{u^1} + (u^2)' f_{u^2}$$

dostaneme

$$\begin{aligned} c'' &= \sum_i (u^i)'' f_{u^i} + \sum_i \sum_j (u^i)' \Big(\sum_k \Gamma^k_{ij} f_{u^k} + h^{ij} n \Big) (u^j)' \\ &= \sum_k \Big((u^k)'' + \sum_i \sum_j (u^i)'(u^j)'\, \Gamma^k_{ij} \Big) f_{u^k} + \sum_i \sum_j (u^i)'(u^j)' h^{ij} n \end{aligned}$$

(Γ^k_{ij} jsou Christoffelovy symboly, viz Lemma 6.1). Z tohoto vyjádření plyne, že křivka $c = f \circ u : I \to \mathbb{R}^3$ je parametrizovaná geodetika, právě když vyhovuje diferenciálním rovnicím na I

$$\begin{aligned} (u^1)'' + \textstyle\sum_i \sum_j (u^i)'(u^j)'\, \Gamma^1_{ij} &= 0, \\ (u^2)'' + \textstyle\sum_i \sum_j (u^i)'(u^j)'\, \Gamma^2_{ij} &= 0. \end{aligned} \tag{15}$$

□

Poznámka: Z výše uvedeného je vidět, že kovariantní derivace vektorového pole i vlastnost 'být geodetikou' je vnitřní vlastností plochy, a lze s nimi tedy pracovat i v Riemannově geometrii. Speciálně tedy izometrickým obrazem geodetiky je opět geodetika.

Příklad 6.8 (Geodetiky na rotační ploše)**.** Uvažujme rotační plochu s parametrizací

$$f(u, v) = (p(u) \cos v, p(u) \sin v, q(u)),$$

kde $u \mapsto (p(u), 0, q(u))$ je křivka ($u \in I$), $p > 0$, $(p')^2 + (q')^2 = 1$ (tedy řídící křivky v rovině $\{y = 0\}$ je parametrizovaná obloukem). Matice g první fundamentální formy a její inverze a jsou

$$g = \begin{pmatrix} 1, & 0 \\ 0, & p^2 \end{pmatrix}, \quad a = \begin{pmatrix} 1, & 0 \\ 0, & \frac{1}{p^2} \end{pmatrix}.$$

Spočteme Christoffelovy symboly; protože matice a je diagonální, počítáme jako

$$\Gamma^k_{ij} = \frac{1}{2} a^{kk} \left(g^{ik}_j + g^{jk}_i - g^{ij}_k \right).$$

Z derivací prvků g je pouze g_1^{22} nenulová. Z Chritoffelových symbolů dostaneme jako nenulové

$$\Gamma^1_{22} = -pp', \quad \Gamma^2_{12} = \frac{p'}{p},$$

a tedy rovnice pro parametrizované geodetiky jsou

$$u'' - pp'(v')^2 = 0, \tag{16}$$

$$v'' + 2\frac{p'}{p}u'v' = 0. \tag{17}$$

Je třeba upozornit, že v těchto rovnicích je derivace funkcí u, v chápána vzhledem k proměnné t, ale derivace p' je podle proměnné u.

Buď nyní $c(t) = f((u(t), v(t))$ parametrizovaná geodetika (tedy $\|c'(t)\|$ je konstantní) a označme $\alpha(t)$ úhel, pod kterým protíná "rovnoběžku" na ploše $\{z = \text{const}\}$. Platí

$$\cos\alpha = \frac{c' \cdot f_v}{\|c'\|\|f_v\|} = \frac{v'p^2}{\|c'\|p} = \frac{v'p}{\|c'\|},$$

a tedy (nyní derivujeme podle t, tedy pod funkcí p chápeme složenou funkci $p \circ u$)

$$(p\cos\alpha)' = \frac{(v'(p\circ u)^2)'}{\|c'\|} = \frac{p^2}{\|c'\|}(v'' + 2\frac{p'}{p}u'v') = 0$$

podle druhé z rovnic pro geodetiky. Pro každou geodetiku tedy platí, že $p(t)\cos\alpha(t)$ je konstantní ($\cos\alpha$ je nepřímo úměrný vzdálenosti od osy z).

Nechť naopak je $c(t) = f((u(t), v(t))$ křivka na dané rotační ploše splňující

$$\|c'(t)\| = \text{const}, \quad p(t)\cos\alpha(t) = \text{const}\,.$$

Z výše uvedené úvahy plyne, že druhá rovnice je ekvivalentní rovnici (17). Protože $\|c'\|^2 = (u')^2 + p^2(v')^2$, derivováním a dosazením $pv'' = -2p'u'v'$ z (17) dostaneme

$$2u'u'' + 2pp'u'(v')^2 + p^2\, 2v'v'' = 2u'(u'' - pp'(v')^2) = 0,$$

tedy buď $u' = 0$ (těmto křivkám na rotační ploše říkáme *rovnoběžky*, nebo $u'' - pp'(v')^2 = 0$, což je rovnice (16), a tedy c je geodetika. Ukázali jsme tedy následující větu.

Věta 6.9 (Clairaut). *Každá geodetika $c : I \to S$ na rotační ploše S splňuje*

$$p(c(t))\cos\alpha(t) = \text{const},$$

kde $p(x)$ je vzdálenost od osy rotace a $\alpha(t)$ je úhel, pod nímž křivka c protíná příslušnou rovnoběžku plochy v bodě $c(t)$. Obráceně, každá křivka na ploše s touto vlastností, která není rovnoběžkou, je geodetika.

7. Gauss-Bonnetova věta

Definice 7.1. Řekneme, že křivka $c : [a, b] \to S$ na orientované ploše S je *jednoduchá, uzavřená a kladně orientovaná*, jestliže existuje mapa $f : U \to S$ plochy a jednoduchá, uzavřená kladně orientovaná křivka $u : [a, b] \to U$ taková, že $c = f \circ u$ a $\operatorname{Int} u \subset U$. Značíme $\operatorname{Int} c := f(\operatorname{Int} u)$.

Věta 7.1. *Buď $c : [a, b] \to S$ parametrizace obloukem jednoduché, uzavřené a kladně orientované křivky na orientované ploše S. Pak*

$$\int_{\operatorname{Int} c} K\, dS = 2\pi - \int_a^b \kappa_g(s)\, ds,$$

kde K je Gaussova křivost plochy, κ_g geodetická křivost křivky na ploše a dS značí integraci na ploše S.

Pozn.: Jedná se o zobecnění věty 2.17

Idea důkazu. Buď $f : U \to S$ mapa pokrývající křivku c, tedy $c(t) = f(u(t), v(t))$, $t \in I$.

Změnou parametru (zachovávající orientaci) dosáhneme toho, aby matice první i druhé fundamentální formy byly diagonální (tedy $g^{12} = h^{12} = 0$ na U). Lokálně toho lze docílit pomocí věty o implicitních funkcích. Pak jsou parametrické křivky hlavními křivkami (tedy f_u, f_v jsou hlavní směry v každém bodě množiny parametrů U).

Označme
$$e_u(s) := \frac{f_u(u(s), v(s))}{\|f_u(u(s), v(s))\|}, \quad e_v(s) := \frac{f_v(u(s), v(s))}{\|f_v(u(s), v(s))\|}.$$
Spolu s vektorem $N(c(s))$ normály k ploše tvoří trojice $(e_u, e_v, N \circ c)$ kladně orientovanou ortonormální bázi v každém bodě křivky. Položme
$$\phi_{12}(s) := e_u'(s)e_v(s) = -e_u(s)e_v'(s).$$
Dále nechť $\theta : [a, b] \to \mathbb{R}$ je diferencovatelná funkce splňující
$$c'(s) = e_u(s) \cos\theta(s) + e_v(s) \sin\theta(s)$$
(její existence se ukáže stejně jako ve Větě 2.14).

Použijeme následující lemma.

Lemma 7.2. *Geodetická křivost křivky $c(s) = f(u(s), v(s)) : [a, b] \to f(U)$ na ploše parametrizované obloukem (nemusí být uzavřená) splňuje*
$$k_g(s) = \phi_{12}(s) + \theta'(s),$$
přitom
$$\phi_{12}(s) = \frac{-g_2^{11}u' + g_1^{22}v'}{2\sqrt{\det g}}.$$

Důkaz lemmatu. Podle definice je
$$k_g = \det(c', c'', N \circ c) = ((N \circ c) \times c') \cdot c'',$$
přitom
$$(N \circ c) \times c' = -e_u \sin\theta + e_v \cos\theta$$
(jedná se o vektor c' otočený v kladném smyslu o $\pi/2$ v tečné rovině). Máme
$$c'' = e_u' \cos\theta + e_v' \sin\theta + (-e_u \sin\theta + e_v \cos\theta)\theta',$$
a tedy
$$k_g = ((N \circ c) \times c') \cdot c'' = e_u' \cdot e_v + \theta' = \phi_{12} + \theta',$$
což je první dokazovaný vztah. Druhý vzorec odvodíme následovně:
$$\phi_{12} = e_u' \cdot e_v = \frac{(f_{uu} \cdot f_v)u' + (f_{uv} \cdot f_v)v'}{\sqrt{\det g}} = \frac{-(f_{uv} \cdot f_u)u' + (f_{uv} \cdot f_v)v'}{\sqrt{\det g}}$$
$$= \frac{-g_2^{11}u' + g_1^{22}v'}{\sqrt{2\det g}}.$$

□

Nyní použijeme Greenovu větu (podobně jako v důkazu Lemmatu 2.18) pro vektorové pole

$$F(u,v) = (F^1(u,v), F^2(u,v)) = \left(-\frac{g_2^{11}}{2\sqrt{\det g}}, \frac{g_1^{22}}{2\sqrt{\det g}} \right)$$

v oblasti vnitřku R jednoduché uzavřené křivky $s \mapsto (u(s), v(s))$:

$$\begin{aligned}\int_R \left(\left(\frac{g_2^{11}}{2\sqrt{\det g}} \right)_v + \left(\frac{g_1^{22}}{2\sqrt{\det g}} \right)_u \right) du\, dv &= \int_R (F_u^2 - F_v^1)\, du\, dv \\ &= \int_a^b (F^1 u' + F^2 v') ds = \int_a^b \phi_{12}(s)\, ds.\end{aligned}$$

Přenosem integrálu na levé straně na plochu s využitím vztahu $dS = \sqrt{\det g}\, du\, dv$ (viz Věta 4.8) dostaneme

$$\int_{\operatorname{Int} c} \frac{1}{\sqrt{\det g}} \left(\left(\frac{g_2^{11}}{2\sqrt{\det g}} \right)_v + \left(\frac{g_1^{22}}{2\sqrt{\det g}} \right)_u \right) dS = \int_a^b \phi_{12}(s)\, ds.$$

Pro Gaussovu křivost platí (za předpokladu $g^{12} = h^{12} = 0$ vztah

$$K = -\frac{1}{2\sqrt{\det g}} \left(\left(\frac{g_2^{11}}{\sqrt{\det g}} \right)_v + \left(\frac{g_1^{22}}{\sqrt{\det g}} \right)_u \right)$$

(lze odvodit z Gaussovy rovnice pro Gaussovu křivost). Dostáváme tedy

$$\int_{\operatorname{Int} c} K\, dS = -\int_a^b \phi_{12}(s)\, ds = \theta(b) - \theta(a) - \int_a^b k_g(s)\, ds.$$

Dokazovaná rovnost pak plyne z toho, že pro jednoduchou uzavřenou kladně orientovanou křivku na ploše platí $\theta(b) - \theta(a) = 2\pi$ (analogicky jako pro křivky v rovině). □

Definice 7.2. Řekneme, že $c : [a,b] \to \mathbb{R}^2$ je *po částech hladká, jednoduchá, uzavřená* parametrizovaná křivka v rovině, jestliže

(1) c je spojitá a má nenulové jednostranné derivace ve všech bodech,
(2) c je diferencovatelná (C^∞) všude mimo konečnou množinu bodů $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b$,
(3) $c(a) = c(b)$,
(4) c je prosté na $[a,b)$.

Analogicky řekneme, že $c : [a,b] \to S$ je *po částech hladká, jednoduchá, uzavřená* parametrizovaná křivka na orientované ploše S, jestliže $c = f \circ u$ pro nějakou mapu f plochy a po částech hladkou, jednoduchou, uzavřenou křivku u v rovině.

Pozn.: Pro po částech hladkou jednoduchou uzavřenou křivku v rovině platí Jordanova věta (věta 2.16), je tedy definován její vnitřek $\operatorname{Int} c$ a můžeme definovat její orientaci. Podobně jako v Definici 7.1 můžeme tedy definovat i vnitřek a orientaci po částech hladké, jednoduché uzavřené křivky na ploše.

Definice 7.3. Je-li $c : [a,b] \to S$ po částech hladká, jednoduchá, uzavřená a kladně orientovaná parametrizovaná křivka na orientované ploše S, pak množinu $M :=< c > \cup \operatorname{Int} c$ budeme nazývat *křivočarý mnohoúhelník* na S s hranicí $< c >$. Body $c(t_i)$ (viz Definice 7.2) nazveme *vrcholy* a množiny $c[t_{i-1}, t_i]$ *hranami* mnohoúhelníku M, $i = 1, \ldots, n$. Orientovaný úhel $\alpha_i \in (-\pi, \pi)$ mezi vektory $c'_-(t_i)$ a $c'_+(t_i)$ se nazývá *vnější úhel* mnohoúhelníku u vrcholu $c(t_i)$.

Pozn: (i) Orientaci úhlu chápeme vůči orientaci tečné roviny, tedy $\alpha_i > 0$ (< 0) pokud $\det(c'_-(t_i), c'_+(t_i), N(c(t_i))) > 0$ (< 0).)

(ii) Množina vrcholů (a tedy i hran) po částech hladké křivky není jednoznačně určena (libovolný bod křivky k ní můžeme přidat). Tato nejednoznačnost nemá vliv na následující výsledky. Křivka c však vždy musí mít aspoň jeden vrchol (a tedy i aspoň jednu hranu).

Větu 7.1 lze přímočaře zobecnit pro po částech hladkou křivku (Greenova věta platí i v tomto případě):

Věta 7.3. *Buď $c : [a, b] \to S$ po částech hladká, jednoduchá, uzavřená a kladně orientovaná parametrizovaná křivka na orientované ploše S s vnějšími úhly $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ příslušného mnohoúhelníku. Pak platí*

$$\int_{\mathrm{Int}\, c} K\, dS = 2\pi - \int_a^b \kappa_g(s)\, ds - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i.$$

Definice 7.4. *Triangulací* kompaktní orientované plochy S rozumíme konečný soubor křivočarých mnohoúhelníků $M_1, \dots, M_k$ na S s vlastnostmi:

(1) existuje atlas plochy S takový, že každý mnohoúhelník M_i leží v obrazu některé mapy tohoto atlasu,
(2) $S = M_1 \cup \dots \cup M_k$,
(3) pro $i \neq j$ je $M_i \cap M_j$ buď prázdná množina, nebo společný vrchol, nebo společná hrana M_i a M_j.

Pro danou triangulaci pak definujeme *Eulerovu charakteristiku* plochy S

$$\chi(S) := \#V - \#H + \#S,$$

kde $\#V$ je počet vrcholů a $\#H$ počet hran všech mnohoúhelníků $M_1, \dots, M_k$, a $\#S := k$ je počet mnohoúhelníků ("stěn").

Věta 7.4 (Gauss-Bonnetova věta)**.** *Pro kompaktní orientovanou plochu platí*

$$\int_S K\, dS = 2\pi\chi(S).$$

Důkaz. Buď $S = M_1 \cup \dots \cup M_k$ triangulace plochy, $c_i : [a_i, b_i] \to S$ parametrizace obloukem obvodu M_i, $c_i(t_i^1), \dots, c_i(t_i^{n_i})$ vrcholy M_i s $a_i < t_1^{i_1} < \dots < t_i^{n_i} = b_i$ a nechť α_i^j, $j = i, \dots, n_i$, jsou vnější úhly mnohoúhelníku M_i, $i = 1, \dots, k$. Označme rovněž $\beta_i^j := \pi - \alpha_i^j$ příslušné vnitřní úhly. Podle věty 7.3 platí

$$\int_S K\, dS = \sum_{i=1}^{k} \int_{M_i} K\, dS = \sum_{i=1}^{k} \left(2\pi - \int_{a_i}^{b_i} k_g^{(i)}(s)\, ds - \sum_{j=1}^{n_i} \alpha_i^j \right),$$

kde $\kappa_g^{(i)}(s)$ je geodetická křivost c_i v bodě s. Každá hrana v triangulaci patří k právě dvěma různým mnohoúhelníkům M_i, M_j, přitom tyto hrany jsou vzhledem k těmto mnohoúhelníkům vzájemně opačně orientovány, tedy pro jejich geodetické křivosti ve společném bodě $c_i(s_i) = c_j(s_j)$ těchto hran platí

$$\kappa_g^{(i)}(s_i) + \kappa_g^{(j)}(s_j) = 0.$$

Příslušné integrály geodetických křivostí se tedy vzájemně vyruší a dostaneme

$$\begin{aligned}\int_S K\,dS &= 2\pi k - \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n_i}\alpha_i^j = 2\pi k - \sum_{i=1}^{k} n_i\pi + \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n_i}\beta_i^j \\ &= 2\pi\#S - 2\pi\#H + 2\pi\#V = 2\pi\chi(S).\end{aligned}$$

V poslední úpravě jsme využili toho, že každá hrana triangulace náleží právě dvěma stěnám, a že součet vnitřních úhlů příslušných jednomu vrcholu je roven 2π. □

Důsledek 7.5. *Eulerova charakteristika nezávisí na volbě triangulace plochy.*

Příklady: (i) Eulerova charakteristika sféry je rovna 2. (i) Eulerova charakteristika toru je rovna 0.

Pozn.: Eulerova charakteristika je invariantní vůči spojitým deformacím v následujícím smyslu: Jsou-li S_0, S_1 dvě kompaktní plochy v $\mathbb{R}^3$ a existuje-li spojité zobrazení $F : [0,1] \times S_0 \to \mathbb{R}^3$ takové, že $F(0,x) = x$ pro všechna $x \in S_0$ a $\{F(1,x) : x \in S_0\} = S_1$, pak $\chi(S_0) = \chi(S_1)$.

Literatura

(1) L. Boček: *Příklady z diferenciální geometrie.* Univerzita Karlova, Praha 1974
(2) L. Boček, V. Kubát: *Diferenciální geometrie křivek a ploch.* Státní pedagogické nakladatelství, Praha 1983
(3) J. Bureš, K. Hrubčík: *Diferenciální geometrie křivek a ploch.* MFF UK, Praha 1998
(4) M.P. do Carmo: *Differential Geometry of Curves and Surfaces.* Prentice Hall, Inc. Englewood Cliffs, New Jersey 1976
(5) W. Klingenberg: *A Course in Differential Geometry.* Springer-Verlag, New York 1978
(6) T. Shifrin: *A first course in curves and surfaces.* `http://alpha.math.uga.edu/~shifrin/ShifrinDiffGeo.pdf`
(7) V. Souček: studijní text k přednášce, `http://msekce.karlin.mff.cuni.cz/~soucek/kpl_11_2012.pdf`